Das Capital Asset Pricing Model und seine zeitkontinuierliche Erweiterung

Fabian R. Lischka*
Karl-Hoffmeister-Pl. 5
47441 Moers
Tel. (02841) 23896
fabian@compuserve.com
Matrikelnummer 0751599

Hamburg und La Zarza, den 28.12.1998

Diplomarbeit am
Institut für Entscheidungstheorie und Unternehmensforschung
Lehrstuhl Prof. Dr. Hermann Göppl
Betreuung Jan Haaß

*Ich bedanke mich für die Förderung durch die Friedrich-Naumann-Stiftung.

Erklärung:

Ich erkläre, daß ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und daß alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht worden sind.

Fabian R. Lischka

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Das Capital Asset Pricing Model

Im Capital Asset Pricing Model werden Vermögensgegenstände betrachtet, die dem Investor in der Zukunft Zahlungsströme zusichern. Die Höhe dieser zukünftigen Zahlungen ist aber nicht sicher, sondern stochastisch, hängt also davon ab, welcher Zustand der Welt eintritt. Es kommen also sowohl *Zeit* als auch *Unsicherheit* ins Spiel.

Die Frage ist nun: Wie entsteht der Preis eines solchen Vermögensgegenstandes?

Das CAPM versucht diese Frage zu beantworten, in dem es aus Annahmen über die Präferenzen der Investoren ableitet, wie sie individuell jeweils ihre Portfolioentscheidungen treffen, und dann betrachtet, was aus diesen Einzelentscheidungen für den Gesamtmarkt folgt, wenn man annimmt, daß der Markt im Gleichgewicht ist. Es koexistieren also der Aspekt der Portfoliowahl und des Gleichgewichts.

Was die Portfolioentscheidungen der Investoren angeht, so wird angenommen, daß sie ihre Portfolios nur nach Erwartungswert und Varianz der Renditen auswählen. Diese Vorgehensweise geht auf Markowitz zurück, der sie 1952 zuerst beschrieb [44].

Die Konsequenz aus dieser scheinbar harmlosen Annahme ist,[1] daß sich das optimale Portfolio jedes einzelnen Investors aus genau zwei allgemeinen Fonds zusammensetzen läßt. Die Zusammensetzung dieser Fonds hängt nur von den Assets ab und kann daher von einer Investmentfirma bestimmt werden, die nichts über die weitere Risikoeinstellung der Investoren weiß. Der Anteil, den die beiden Fonds im Portfolio eines bestimmten Investoren haben, hängt dann von seiner Risikoaversion ab.

Die beiden Fonds sind „Randportfolios“, sie haben eine minimale Varianz für ihren Erwartungswert und liegen damit, wenn man Varianz und

[1] Wenn die Investoren in ihrer Einschätzung der Verteilung der stochastischen Auszahlungen übereinstimmen.

Erwartungswert aller möglichen Portfolios gegeneinander aufträgt, auf dem Rand dieser zulässigen Menge.

Welche Folgen diese Einzelentscheidungen für die Preise im Gleichgewicht haben, wurde von Sharpe [62], Lintner [36] und Mossin [47] in der Mitte der sechziger Jahre untersucht. [2]

Da jedes einzelne Portfolio eines nach Erwartungswert und Varianz entscheidenden Investors aus diesen beiden Fonds besteht, muß auch das Marktportfolio aus diesen beiden Fonds bestehen, und es ist also auch ein Randportfolio.[3]

Nun ergibt sich aber mathematisch für Randportfolios eine sehr einfache lineare Preisformel. Da sie auch für das Marktportfolio gilt, das ja nun als Randportfolio identifiziert ist, kann man die erwartete Rendite der Assets in Bezug setzen zu ihrer Kovarianz mit der Marktrendite, und es ergibt sich die berühmte CAPM-Formel

$$\boxed{E[\tilde{r}_j] = r_f + \beta_{jm}\big(E[\tilde{r}_m] - r_f\big).}$$

Die Investoren werden nicht für das gesamte übernommene Risiko kompensiert, sondern nur für einen Teil, nämlich die Kovarianz zum Markt. Das läßt sich intuitiv so erklären, daß der restliche Teil des Risikos durch vollständige diversifizierte Portfolios vernachlässigbar klein gemacht werden kann.

Obwohl das CAPM schon über 30 Jahre alt ist, werden bis heute Artikel dazu veröffentlicht. Das Modell war wegen seiner restriktiven und unrealistischen Annahmen stets umstritten (was seiner starken Verbreitung in der Praxis nicht im Wege stand), und viel Forschung ist darauf verwandt worden, die Annahmen abzuschwächen. Das CAPM ist als hervoragendes Beispiel für Milton Friedmans methodologisches Programm bezeichnet worden, demzufolge ein Modell nicht nach der Realitätsnähe und Relevanz seiner Prämissen, sondern nach der Treffsicherheit seiner Voraussagen beurteilt werden sollte[12, Seite 18].

In letzter Zeit hat die Forschungsaktivität auf dem Gebiet wieder zugenommen, und es wurde die Existenz und Eindeutigkeit von Gleichgewichten untersucht ([50], [49], [2], [8]), und das μ-σ-Kriterium auf Verhaltensannahmen zurückgeführt [40]. Einige der Resultate werden im folgenden wiedergegeben.

---

[2] Es vergingen also einige Jahre, bevor die normativen Resultate der Portfoliowahl des Investors in eine positive Theorie des Kapitalmarkts insgesamt umgesetzt wurde. Die Erklärung, so Brennan (zitiert nach [12, Seite 15]), liegt darin, daß die Annahme der homogenen Erwartungen (Fußnote 1) so gewagt, ja tollkühn („bold“) war.

[3] Wie später gezeigt wird, ist nämlich die Menge der Randportfolios konvex.

Ziel dieser Arbeit

In dieser Arbeit soll das CAPM relativ sauber dargestellt werden, mit besonderer Beachtung der Voraussetzungen, auf denen es beruht.

Es werden verschiedene Varianten betrachtet, die schrittweise überleiten von der einfachsten, klassischen Version über eine Gleichgewichtsvarianteg hin zu einer vereinfachten zeitkontinuierlichen Version.

1.2 Verschiedene Modelle

1.2.1 Der Unterschied zwischen Arbitrage- und Gleichgewichtsmodellen

Arbitragemodelle benutzen als wesentliche These[4] das „Law of one Price", das besagt, daß gleiche zukünftige Zahlungsströme den gleichen heutigen Preis haben müssen. Wenn man also einen bisher unbewerteten Zahlungsstrom als Linearkombination anderer, bekannter Zahlungsströme darstellen kann, dann muß der heutige Wert des neuen Zahlungsstrom gleich der Linearkombination der Preise der bekannten Zahlungsströme sein. Um abhängige Preise derart zu berechnen, braucht man keine Annahmen über die Präferenzen der Investoren. Zur Preisfindung müssen aber die Preise der bekannten Zahlungsströme irgendwie gegeben sein, d. h. sie sind exogen.

In Gleichgewichtsmodellen hingegen werden zusätzliche Annahmen getroffen, namentlich über die Nutzeneinstellungen der Investoren, homogene Erwartungen, und die Existenz eines Gleichgewichts[5]. Damit lassen sich im Gleichgewichtsmodell die Preise endogenisieren, man muß sie also nicht vorher kennen oder annehmen, sondern sie ergeben sich aus dem Modell.[6] Meistens werden entsprechend die Gleichgewichtsmodelle zur Bewertung der Basiswertpapiere eingesetzt (z. B. das CAPM für Aktien), die Arbitragemodelle zur Bewertung abgeleiteter Finanzinstrumente (z. B. Black-Scholes für Optionen).

Insgesamt benötigen Gleichgewichtsmodelle also mehr Input, nämlich stärkere Annahmen über Investorpräferenzen und die Existenz eines Gleichgewichts, liefern aber auch mehr Output, nämlich alle relativen Preise endogen. Damit sind diese Modelle aber auch restriktiver und weniger robust.

[4]Weitere Annahmen sind z. B. bedingt homogene Erwartungen (alle Investoren erwarten die gleiche Auszahlung eines Assets, gegeben einen Umweltzustand) und Übereinstimmung bezüglich unmöglicher Zustnden (entweder schreiben alle Investoren einem Zustand eine Wahrscheinlichkeit von Null zu, oder alle größer Null.). Es handelt sich also um unterschiedliche, aber äquivalente subjektive Wahrscheinlichkeitsmaße für die Zufallsvariablen. Weitere Annahmen sind friktionslose Märkte mit vollständigem Wettbewerb, etc.

[5]Ein Konzept, das für Arbitragemodelle nicht nötig ist! [31, S. 213]

[6]Genauer gesagt, ergeben sich die relativen Preise; ein bestimmter Preis (das Numeraire, oder der aggregierte Konsum) muß also vorgeben sein. Das liegt daran, daß die Menge aller Bestimmungsgleichungen linear abhängig ist und man eine ohne Informationsverlust eliminieren kann (Walras' Gesetz).

1.2.2 Hier dargestellte Modelle

Das CAPM ist ein Gleichgewichtsmodell. Oft läßt sich nicht unmittelbar erkennen, wo die Preise bestimmt werden, da erstens in den meisten Herleitungen die Renditen im Mittelpunkt stehen, und zweitens das individuelle Investorverhalten betrachtet wird, dann ein Gleichgewicht postuliert, und eine Aussage über den Gesamtmarkt gemacht wird. In einer der hier gewählten Herleitungen wird explizit modelliert, welchen Preis der Investor zu zahlen bereit ist, und explizit die Gleichgewichtsbedingungen bestimmt, die dann zu den hinlänglich bekannten Renditegleichungen führen.

Historisch war es so, daß sich zunächst Markowitz in dem lapidar betitelten Aufsatz „Portfolio Selection“ [44] Gedanken darüber machte, wie ein Investor sein Portfolio optimal wählen sollte. Er führte die überaus fruchtbare, aber problematische Vereinfachung ein, daß man das Portfolio nur nach Erwartungswert und Varianz der Rendite beurteile, also den ersten beiden Momenten der Verteilung.[7] Das führt zum Markowitz-Tobin-Modell der Portfolioselektion für den individuellen Investor.

Das Sharpe-Lintner-Mossin-CAPM

Später wurde der Gleichgewichtsgedanke eingeführt im eigentlichen klassischen CAPM von Sharpe [62], Lintner [36] und Mossin [47], indem festgestellt wurde, daß im Gleichgewicht auch der Gesamtmarkt μ-σ-effizient sein muß, wenn jeder einzelne Investor effiziente Portfolio wählt (aber nur mittels der trivial anmutenden Aussage, daß im Gleichgewicht das Marktportfolio eine konvexe Kombination der Portfolios der einzelnen Investoren ist). Im Sharpe-Lintner-Mossin-Modell gibt es ein risikoloses Wertpapier mit einem festen Zins für beliebig große Kredite und Investitionen, für die anderen Assets sind die Rendite stochastisch.

---

[7] Zu der Zeit war das eher eine Verkomplizierung, da bis dato fast nur der Erwartungswert betrachtet wurde. Auch Tobin erforschte früh (1958) das μ-σ-Modell [63] (er zeigte als erster die Zwei-Fond-Separation auf), und unnachahmlich antwortete er Kritikern ([7], [22]), die diese Simplifizierung Ende der sechziger Jahre kritisierten:

> I do not believe it is an exaggeration to say that, until relatively recently, the basic model of portfolio choice used in economic theory was a one-parameter model. Investors were assumed to rank portfolios by reference to one parameter only — the expected return, possibly corrected by an arbitrary „risk premium“, constant and unexplained. [...] It is now more than a decade ago that I participated in the modest endeavour of doubling the number of parameters of investors' probability estimates involved in economists' analyses of asset choice. This extension from one moment to two was never advertised as the complete job or the final word, and I think that its critics in 1968 owe us more than demonstrations that it rests on restrictive assumptions.

Blacks Zero-Beta-CAPM

Wiederum einig Jahre später entwickelte Black das Zero-Beta-CAPM [5], das auch realistischere Szenarien zu erfassen vermag, z. B. unterschiedliche Zinsraten für Kreditaufnahme und Anlage, oder gar die Abwesenheit einer risikolosen Anlagemöglichkeit.

In dieser Arbeit wird zunächst Blacks Zero-Beta-CAPM hergeleitet, dazu ist die Untersuchung des Portfoliorandes und der Begriff des Nullkovarianzportfolios nötig. Diese Vorarbeiten erleichtern die Betrachtung des klassischen Sharpe-Lintner-Mossin CAPM danach ungemein.

Jarrows Gleichgewichts-CAPM

Später wird der Gleichgewichtsgedanke expliziert in einem CAPM im Rahmen einer Tauschwirtschaft (Jarrows Version), in dem eine Anfangsausstattung an Assets gegeben ist, die durch ihre *Auszahlung* spezifiziert sind. Außerdem müssen die Investoren in diesem Modell zwischen Konsum heute und morgen abwägen. Die Investoren tauschen dann ihre Assets, und es entwickeln sich bestimmte Tauschverhältnisse, also Preise. Es werden explizit die Nachfragefunktionen der Investoren hergeleitet (Gegeben die Preise der Assets, wieviel kaufe ich von jedem, um meinen Nutzen zu maximieren?), und dann mittels der Gleichgewichtsbedingung, daß die Nachfrage gleich dem Angebot sei, explizit die markträumenden Preise bestimmt.

Diese Darstellung soll zum einen den Gleichgewichtsgedanken herausheben, zum anderen vorbereiten auf Mertons zeitkontinuierliches CAPM, in dem die Investoren zu jedem Zeitpunkt eine Konsum- und Portfolioentscheidung treffen müssen.

Mertons zeitkontinuierliches CAPM

In Mertons Modell folgen die Assetpreise einer geometrischen Brownschen Bewegung (sie haben also beschränkte Haftung!), und die Investoren besitzen eine zeitseparable und -additive Nutzenfunktion, die aber sonst recht allgemein gehalten werden kann. Damit erzielt man (im einfachsten Fall) das gleiche Ergebnis (Zwei-Fond-Separation und Wertpapiermarktlinie) wie im einperiodigen CAPM, kann aber auf die Annahme der μ-σ- Präferenz verzichten. Allerdings gilt das nur, wenn die Parameter der stochastischen Assetrenditen[8] konstant bleiben im Verlauf der Zeit, andernfalls gelangt man zu höherdimensionalen Ergebnissen.

Hier wird das zeitkontinuierliche Entscheidungsproblem des Investors mittels stochasticher dynamischer Programmierung gelöst, wie es Merton ursprünglich schon 1969 tat [45]. Das führt nach Anwendung des Bellmanschen Optimalitätsprinzips zu zu einer nichtlinearen partiellen Differential-

[8] das Investitionsspektrum oder „investment opportunity set“

gleichung, die man zum Glück nicht explizit lösen muß, um einige wichtige und schöne Resultate zu erhalten.

1.2.3 Einige Unterscheidungen

Die grundlegenden Bausteine einer CAPM-Ökonomie sind die Assets und die Investoren. Die Assets haben einen Preis und eine stochastische Auszahlung, und damit eine Rendite [9]. Die Investoren haben Präferenzen, mittels derer sie ihre Portfoliowahl treffen.

Die genauere Ausgestaltung des Modells enthält einige Feinheiten, die hier herausgearbeitet werden.

Auszahlungen oder Rendite

In manchen Modellen sind die Assets durch ihre *Auszahlung* (Cash Flow) in der nächsten Periode beschrieben, nämlich $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_j, \ldots, \tilde{x}_J$, in anderen durch ihre *Rendite* $\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_j, \ldots, \tilde{r}_J$. Natürlich sind Auszahlung und Rendite verknüpft durch $r_j = \frac{x_j - p_j}{p_j}$, d. h. die Rendite ist die Änderung des Vermögens geteilt durch das eingesetzte Vermögen, und man könnte daher annehmen, daß die Beschreibungen daher völlig äquivalent und austauschbar seien. Allein, für die Berechnung der Rendite braucht man nicht nur die Auszahlung morgen, sondern auch den Preis heute, und der soll ja erst bestimmt werden.

In den meisten General-Equilibrium-Modellen werden die Renditen also nicht als exogene Bausteine betrachtet, sondern endogen bestimmt, in Abhängigkeit der endogen bestimmten Preise, die sich aus der Nachfrage der Investoren ergibt, die wiederum von der Verteilung der Auszahlung und der Risikoeinstellung der Investoren abhängt.

In der traditionellen CAPM-Literatur hingegen werden die Assetrenditen als ein exogen gegebener Basisbaustein des Modells betrachtet. Berk [2] weist darauf hin, daß die explizite Bestimmung der Preise nicht notwendig ist für die wesentlichen Aussagen des CAPM, da sie nur an Punkten ins Spiel kommen, die (durch Normierung) unabhängig von den Preisen beschrieben werden können.

Eine weitere Rechtfertigung für die Beschreibung der Assets durch ihre Renditen ist die Annahme, daß alle Investoren Preisnehmer sind, d. h. die Preise durch ihre Wahl einzeln nicht beeinflussen können, also jeder einzelne eine horizontale Angebotskurve ansieht, und damit im Grunde bestimmten Renditen gegenübersteht.

Festzuhalten bleibt, daß dies ein oft ignorierter Punkt ist, der gelegentlich zu Verwirrung führt.

[9] Falls der Preis ungleich Null ist, was implizit vorausgesetzt wird.

Vermögen oder Konsum

Die Spezifikation der Präferenzen der Investoren läßt oft offen, ob ihre Präferenzen Vermögen oder Konsum betreffen. Der Unterschied ist nicht nur, daß Vermögen in Geldeinheiten und Konsum in Einheiten des Konsumgutes[10] gemessen wird, sondern auch, daß Vermögen wohl negativ werden kann, Konsum aber nicht sinnvollerweise. Man muß dann also den Auszahlungen der Portfolios eine Nichtnegativitätsbeschränkung auferlegen.

Real oder nominal

Ebenso läßt die Beschreibung der Assets manchmal offen, ob die Auszahlungen in Geldeinheiten oder in Einheiten des Konsumgutes denominiert sind. Wenn es sich um monetäre Größen handelt, der Nutzen aber über Konsumgüter definiert ist, dann muß ein Preisniveau existieren, das die Umrechnung von Geld in Konsumgüter erlaubt. Dann muß die Inflation berücksichtigt werden.

Spezifikation der Assets durch ihre Rendite kann zu der Frage leiten, ob die nominale oder reale Rendite gemeint ist, wieder muß u. U. die Inflation berücksichtigt werden.

Hier wird durchgehend ein Preisniveau von eins angenommen, so daß nicht zwischen Konsumgut und Geldvermögen unterschieden werden muß, außerdem wird so der Einfluß der Inflation ausgeschaltet.

Investition in Einheiten des Numeraire oder Anteilen

Je nachdem, ob die Assets durch Rendite oder Auszahlung gekennzeichnet sind, betrachtet man sinnvollerweise auch Portfolios anders. Ist ein Asset durch die Rendite $\tilde{r}_j$ spezifiziert, dann gibt y_j an, wieviel Geldeinheiten (oder Einheiten des Konsumgutes) in Asset j gesteckt sind. Ist ein Asset durch die Auszahlung x_j pro Anteil spezifiziert, dann gibt n_j an, wieviele Anteile dieses Assets gekauft werden.

Normierte oder nichtnormierte Portfolios

Wenn schon feststeht, wieviel ein Investor investiert, dann kommt es offenbar nur noch auf die *Anteile* an, die der Investor in die verschiedenen Assets steckt. Daher werden oft (hier durch ein Dach gekennzeichnete) auf eins normierte Portfolios betrachtet.

Das hat die Vorteile, daß man sich um das absolute Vermögen einzelner Investoren nicht kümmern muß, und die Berechnung der Erwartungswerte und Varianzen der Renditen von normierten Portfolios sehr einfach wird.

---

[10] oder der Konsumgüter

Kapitel 2

Die Assets und ihre Darstellung

Es gibt im wesentlichen zwei ökonomische Bausteine des CAPM: Zum ersten die Assets mit der Beschreibung, was sie auszahlen (und mit den Portfolios, die man daraus bilden kann), zum anderen die Investoren mit ihren Präferenzen.[1]

In diesem Kapitel wird betrachtet, wie man die Assets und die Portfolios daraus formal beschreiben und anschaulich darstellen kann, im nächsten, wie man die Investoren und ihren Nutzen formal beschreiben kann.

2.1 Assets und Portfolios

2.1.1 Assets

Es gibt einige Assets (das können Aktien, Anleihen, Versicherungen, Immobilien, usw. sein). Heute bezahlt man etwas für einen Anteil eines Assets, und morgen bekommt man eine stochastische Auszahlung, die verstanden werden kann als Summe von Liquidationswert und eventuellen Dividenden oder anderen Zahlungen aus diesem Vermögensgegenstand. Diese totale stochastische Auszahlung wird durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben.

Auszahlung

Die stochastischen Auszahlungen der J endlich vielen Assets lassen sich modellieren durch eine Menge $\mathcal{S}$ von Zuständen[2], von denen genau einer morgen eintritt. In Abhängigkeit davon, welcher Zustand s eintritt, zahlen die Assets verschieden viel aus, d. h. ein Asset j läßt sich dann beschreiben als eine Abbildung $x_j : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$, und $x_j(s)$ ist die Auszahlung von Asset j, falls

[1] Manchmal, je nach Modell, wird auch die Anfangsausstattung der Investoren mit Vermögen oder Assets als Grundbaustein verstanden.

[2] Die Menge der Zustände kann endlich, abzählbar oder überabzählbar unendlich sein.

Zustand s eintritt. Die Auszahlung eines Assets j ist also eine Zufallsvariable $\tilde{x}$, [3] und die Auszahlungen aller J Assets lassen sich zusammenfassen in einen J-dimensionalen Zufallsvektor $\tilde{\mathbf{x}}$.

Das risikolose Asset zahlt in allen Zuständen das gleiche aus und sei normiert auf eine Auszahlung von 1. Wenn es ein risikoloses Asset gibt, sei es Asset 0, und es gibt $J+1$ Assets, nämlich ein risikoloses und J risikobehaftete.

Definition (Risikoloses Asset). Ein risikoloses Asset ist ein Asset x_0, für das gilt: $\forall s \in \mathcal{S} : x_j(s) = 1$. Die Ausahlung ist also unabhängig vom eingetretenen Zustand immer eins.

Das risikolose Asset habe immer die Nummer 0, wird aber oft auch mit f bezeichnet (entsprechend $x_f = 1; r_f = \frac{1-p_f}{p_f}; n_f$ etc.).

Die Auszahlung von Assets mit beschränkter Haftung ist nie negativ und manchmal positiv.

Definition (Beschränkte Haftung). Ein Asset mit beschränkter Haftung ist ein Asset $\tilde{x}_j$, für das gilt:

$$\forall s \in \mathcal{S} : x_j(s) \geq 0 \text{ und } \exists s \in \mathcal{S} : x_j(s) > 0$$

Jedes Asset hat heute einen Preis, nämlich $p(\tilde{x}_j)$. Diese Preise können zusammengefaßt werden in einen Preisvektor $\mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}})$.

Arbitrage

Arbitragefreiheit[4] kommt im CAPM insofern ins Spiel, als angenommen wird,

- daß es maximal eine risikolose Rendite gibt; wenn es mehrere gäbe, würde eine dominieren, und die Preise so bewegen, daß sich die Renditen angleichten
- daß Assets mit beschränkter Haftung einen positiven Preis haben.
- daß ein Portfolio aus zwei Assets so viel kostet wie die beiden einzelnen Assets zusammen
- daß das Preisfunktional linear ist, d. h. der Preis einer Kombination von Assets gleich der Kombination der Preise der Assets ist.[5]

[3] Wenn man die dadurch generierte σ-Algebra über $\mathcal{S}$ mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß versieht, kann man dann auch den Erwartungswerte und Varianzen berechnen, dies wird im folgenden implizit vorausgesetzt.

[4] Das setzt bestimmtes Investorverhalten voraus und ist daher nicht notwendigerweise für *alle* (auch irrationale) Typen von Investoren gegeben, aber für alle rationalen und daher eine sehr schwache Annahme.

[5] Dies ist eine Folgerung aus den beiden Punkten davor [39].

Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, kann es bei rationalen Investoren und friktionslosen perfekten Märkten kein Gleichgewicht geben.[6]

Rendite

Hat man den Preis und die Auszahlung eines Assets, so kann man die Rendite bestimmen, sie ist das Verhältnis von Preissteigerung (Auszahlung minus Preis) zu ursprünglichem Preis. Liegt die Auszahlung noch in der unsicheren Zukunft und ist also eine Zufallsvariable, dann ist die Rendite auch stochastisch:

Definition (Rendite eines Assets). Die Rendite $\tilde{r}_j$ eines Assets j ist eine Zufallsvariable mit

$$\tilde{r}_j := \frac{\tilde{x}_j - p(\tilde{x}_j)}{p(\tilde{x}_j)} = \frac{\tilde{x}_j}{p(\tilde{x}_j)} - 1$$

Die Rendite ist offenbar nur definiert, wenn der Preis eines Assets ungleich Null ist. Das läßt sich zum Beispiel durch die Forderung realisieren, daß alle Assets beschränkte Haftung haben.

Leerverkäufe

Wenn ein Investor i ein Asset j leerverkauft, dann ist n_j^i negativ, er hat das Asset effektiv in negativer Zahl gekauft. Das heißt, der Investor bekommt jetzt Geld ($n_j^i \cdot p_j$) und verspricht, in der nächsten Periode Geld auszuzahlen, und zwar so viel, wie entsprechend viele Anteile des Assets ausgezahlt hätten, also $n_j^i \cdot \tilde{x}_j$.

Brutto- und Nettoangebot

Von jedem Asset ist oft nur eine bestimmte Anzahl gegeben, das sogenannte Nettoangebot. Wenn die Assets durch ihre Auszahlung x_j gegeben sind, und Investor i von Asset j genau n_j^i Stücke hält, dann ist das Nettoangebot n_j^m gerade $\sum_{i=1}^I n_j^i$.

Nun kann es ja sein, daß einige Investoren leerverkauften. Dann ist das Bruttoangebot gleich die Summer aller positiver n_j^i, wieviel also insgesamt verkauft wird — sei es ein echter Verkauf, sei es ein Leerverkauf.

Assets, die in einem Nettoangebot von Null vorhanden sind, heißen finanzielle Assets. Typische Assets dieser Art sind z. B. Optionen: Die Summe aller Zahlungsströme aus einer Option am Fälligkeitstag ist null, und jedem, der eine Option long ist, steht jemand gegenüber, der eine Option short ist.

Ein weiteres Asset, von dem im Modell oft angenommen wird, daß es in einem Nettoangebot von Null ist, ist das risikolose. Es wird also genauso

[6] Zumindest nur in degenerierten Fällen. Löffler gibt ein Beispiel eines CAPM-Gleichgewichts mit nichtlinearem Preisfunktional an, siehe [39].

oft gekauft wie (leer)verkauft, verschwindet damit im Saldo, und tritt im Marktportfolio nicht auf[7].

2.1.2 Charakterisierung der Verteilung

Nun geht es darum, die Verteilung der stochastischen Auszahlung oder Renditen zu charakterisieren. Die Erwartungswerte werden in einem Vektor zusammengefaßt, die Varianzen und Kovarianzen in eine Matrix.

Definition (Erwartungswertvektor). Der Erwartungswertvektor der Auszahlungen ist $\boldsymbol{\mu}_x = E[\tilde{x}]$. Entsprechend ist der Erwartungswertvektor der Renditen $\boldsymbol{\mu}_r = E[\tilde{r}]$.

Beide Vektoren sind Element des $\mathbb{R}^J$ (oder mit riskantem Asset u. U. $\mathbb{R}^{J+1}$, manchmal wird das risikolose Asset aber separat behandelt.)

Definition (Kovarianzmatrix). Die Kovarianzmatrix der Auszahlungen ist $\mathbf{V}_x = E[(\tilde{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\tilde{x} - \boldsymbol{\mu}_x)']$. Man überzeuge sich, daß

$$v_{j_1 j_2} = E\Big[\big(\tilde{x}_{j_1} - E[\tilde{x}_{j_1}]\big)\big(\tilde{x}_{j_2} - E[\tilde{x}_{j_2}]\big)\Big] = cov[\tilde{x}_{j_1}, \tilde{x}_{j2}]. \tag{2.1}$$

Die Kovarianzmatrix der Renditen ist $\mathbf{V}_r = E[(\tilde{r} - \boldsymbol{\mu}_r)(\tilde{r} - \boldsymbol{\mu}_r)']$.

Lineare Unabhängigkeit

Oft wird angenommen, daß man aus den gegebenen riskanten Assets kein risikoloses Portfolio (also mit Varianz Null) konstruieren kann. Das heißt formal, daß die um ihren Erwartungswert korrigierten[8] Assets linear unabhängig sind, d. h. man kann keine lineare Kombination mit Koeffizienten y_j von Assets finden, so daß gilt:

$$\forall s \in \mathcal{S} : \sum_{j=1}^{J} y_j(x_j(s) - E[x_j]) = 0.$$

Falls die Assets in diesem Sinne linear abhängig wären[9], könnte man ein Portfolio $\mathbf{y} \neq 0$ mit Varianz von Null konstruieren.

Damit wäre die Kovarianzmatrix nicht positiv definit, sondern positiv semidefinit, und damit nicht regulär, könnte also nicht invertiert werden. Wenn die Assets wie hier definiert linear unabhängig sind, dann ist die Kovarianzmatrix $\mathbf{V}$ positiv definit und damit invertierbar.

Zwei perfekt korrelierte Assets sind auf jeden Fall linear abhängig in diesem Sinn.

---

[7] Im Sharpe-Lintner-Mossin CAPM ist dann das Marktportfolio genau das Tangentialportfolio t (und nicht eine Kombination von t und r_f).

[8] Wenn man die Korrektur um den Erwartungswert wegläßt, kann man aus unabhängigen Assets u. U. ein risikoloses Portfolio (mit Erwartungswert ungleich Null) konstruieren, siehe [42], und die Kovarianzmatrix ist singulär.

[9] Offenbar insbesondere schon dann der Fall, wenn das risikolose Asset enthalten ist.

Vollständigkeit

Ein Kapitalmarkt heißt vollständig, wenn man für jeden möglichen zünftigen Umweltzustand ein Portfolio bilden kann, das genau nur in diesem Zustand eine Währungseinheit auszahlt. Diese Portfolios werden auch Arrow-Debreu-Assets genannt. Wenn das möglich ist, kann man – durch Portfolios aus diesen Portfolios – jede gewünschte Zustand-Auszahlungskombination herstellen. Anders gesagt, man kann die Auszahlung eines jeden vorstellbaren neuen Assets duplizieren, indem man bestimmte Mengen der alten Assets kauft. Das ist nur möglich, wenn es wenigstens so viele Assets wie mögliche zukünftige Zustände gibt — in Wirklichkeit also offenbar nicht.

2.1.3 Portfolios

Ein Portfolio ist eine Kombination von Assets.

Menge aller Portfolios

Die Menge aller gehandelten Portfolios wird mit $\mathcal{Y}$ bezeichnet. Sie ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^J$, und meistens gleich $\mathbb{R}^J$ angenommen. Das bedeutet, daß man davon ausgeht, daß es keine Beschränkungen gibt bezüglich Leerverkauf und Größenordnung, und daß die Assets unendlich fein teilbar sind. Sind Leerverkäufe verboten, müssen also alle Portfolios alle Assets in nichtnegativer Zahl enthalten, so ist $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^J_{\geq 0}$.

Investition, Auszahlung und Rendite

Wenn die Assets durch ihre Auszahlung gegeben sind, ist ein Portfolio ein Vektor $\mathbf{n}$, und n_j gibt an, wieviel Stück von Asset j gekauft werden. Die Auszahlung des Portfolios ist dann $\mathbf{n}'\tilde{\mathbf{x}}$, und der Preis $\mathbf{n}'\mathbf{p}$, sonst entstünden Arbitragemöglichkeiten.

Wenn die Assets durch ihre Rendite gegeben sind, ist ein Portfolio ein Vektor $\mathbf{y}$, und y_j gibt an, wieviel in Asset j investiert wird. Die Auszahlung des Portfolios ist dann $\mathbf{y}'(\mathbf{1} + \tilde{\mathbf{r}})$, und der Preis $\mathbf{y}'\mathbf{1}$.

Damit kann man die Rendite eines Portfolios angeben:

Definition (Rendite eines Portfolios). Die Rendite $\tilde{r}_y$ eines Portfolios y ist eine Zufallsvariable mit

$$\tilde{r}_y := \frac{\mathbf{n}'\tilde{\mathbf{x}}}{p(\mathbf{n}'\tilde{\mathbf{x}})} - 1 = \frac{\mathbf{n}'(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}}))}{\mathbf{n}'\mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}})},$$

oder, falls die *Renditen* exogen gegeben sind,

$$\tilde{r}_y := \frac{\mathbf{y}'(1 + \tilde{\mathbf{r}})}{\mathbf{y}'\mathbf{1})} - 1 = \frac{\mathbf{y}'\tilde{\mathbf{r}}}{\mathbf{y}'\mathbf{1}}. \tag{2.2}$$

Diese letztere Gleichung motiviert die Einführung normierter Portfolios, da dann die Rendite sehr leicht darstellbar ist:

Auszahlung und Rendite von Portfolios

	Assets gegeben durch	
	Rendite $\tilde{\mathbf{r}}$	Auszahlung $\tilde{\mathbf{x}}$
Investition	$\mathbf{y}'\mathbf{1}$	$\mathbf{n}'\mathbf{p}$
Auszahlung	$\mathbf{y}'(\mathbf{1}+\tilde{\mathbf{r}})$	$\mathbf{n}'\tilde{\mathbf{x}}$
mit	$\boldsymbol{\mu}_r := E[\tilde{\mathbf{r}}]$	$\boldsymbol{\mu}_x := E[\tilde{\mathbf{x}}]$
und	$\mathbf{V}_r := E[\tilde{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{r}}'] - \boldsymbol{\mu}_r\boldsymbol{\mu}_r'$	$\mathbf{V}_x := E[\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}'] - \boldsymbol{\mu}_x\boldsymbol{\mu}_x'$
E[Auszahlung]	$\mathbf{y}'(\mathbf{1}+\boldsymbol{\mu}_r)$	$\mathbf{n}'\boldsymbol{\mu}_x$
Var[Auszahlung]	$\mathbf{y}'\mathbf{V}_r\mathbf{y}$	$\mathbf{n}'\mathbf{V}_x\mathbf{n}$
Rendite	$\frac{\mathbf{y}'\tilde{\mathbf{r}}}{\mathbf{y}'\mathbf{1}}$	$\frac{\mathbf{n}'\tilde{\mathbf{x}}}{\mathbf{n}'\mathbf{p}} - 1$
E[Rendite]	$\frac{\mathbf{y}'\boldsymbol{\mu}_r}{\mathbf{y}'\mathbf{1}}$	$\frac{\mathbf{n}'\boldsymbol{\mu}_x}{\mathbf{n}'\mathbf{p}} - 1$
Var[Rendite]	$\frac{\mathbf{y}'\mathbf{V}_r\mathbf{y}}{(\mathbf{y}'\mathbf{1})^2}$	$\frac{\mathbf{n}'\mathbf{V}_x\mathbf{n}}{(\mathbf{n}'\mathbf{p})^2}$
	Portfolios normiert mit	
	$\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{1} = 1$	$\hat{\mathbf{n}}'\mathbf{p} = 1$
Investition	1	1
Auszahlung	$1 + \hat{\mathbf{y}}'\tilde{\mathbf{r}}$	$\hat{\mathbf{n}}'\tilde{\mathbf{x}}$
E[Auszahlung]	$1 + \hat{\mathbf{y}}'\boldsymbol{\mu}_r$	$\hat{\mathbf{n}}'\boldsymbol{\mu}_x$
Var[Auszahlung]	$\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{y}}$	$\hat{\mathbf{n}}'\mathbf{V}_x\hat{\mathbf{n}}$
Rendite	$\hat{\mathbf{y}}'\tilde{\mathbf{r}}$	$\hat{\mathbf{n}}'\tilde{\mathbf{x}} - 1$
E[Rendite]	$\hat{\mathbf{y}}'\boldsymbol{\mu}_r$	$\hat{\mathbf{n}}'\boldsymbol{\mu}_x - 1$
Var[Rendite]	$\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{y}}$	$\hat{\mathbf{n}}'\mathbf{V}_x\hat{\mathbf{n}}$

Die y_j in der linken Spalte bezeichnen die *Investition in Geldeinheiten* in Asset j, die n_j in der rechten Spalte die *Anzahl der gekauften Shares* an Asset j.

Normierte Portfolios

Normierte Portfolios sind auf eine Investition von einer Geldeinheit zum Zeitpunkt $t = 0$ normiert. Sie geben also den *Anteil* des Assets am Portfolio an; die Anteile werden auch als Portfoliogewichte bezeichnet. Sie sind durch ein Dach gekennzeichnet. Es gilt also:

Definition (Normierte Portfolios). Für gegebene Assetrenditen ist ein normiertes Portfolio $\hat{\mathbf{y}}$ ein Portfolio, für das gilt:

$$\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{1} = 1. \tag{2.3}$$

Für gegebene Assetauszahlungen ist ein normiertes Portfolio $\hat{\mathbf{n}}$ ein Portfolio, für das gilt:

$$\hat{\mathbf{n}}'\mathbf{p} = 1. \tag{2.4}$$

Die Menge aller normierten Portfolios ist ein Teilraum von $\mathcal{Y}$ und sei bezeichnet als $\hat{\mathcal{Y}}$.

Schließlich seien noch Ausdrücke für Erwartungswert und Varianz eines Portfolios angegeben.

Die Auszahlung eines Portfolios ist gleich der Summe der Auszahlungen der Assets, nämlich $\mathbf{n}'\tilde{\mathbf{x}}$. Der Erwartungswert davon ist gerade $E[\mathbf{n}'\tilde{\mathbf{x}}] = \mathbf{n}'E[\tilde{\mathbf{x}}] = \mathbf{n}'\boldsymbol{\mu}_x$, da der Erwartungswert ein linearer Operator ist, also der Erwartungswert einer gewichteten Summe von Zufallsvariablen gleich der gewichteten Summe der Erwartungswerte der Zufallsvariablen ist.

Die Varianz ist eine bilineare Form, mithin:

$$Var[aX + bY] = a^2 Var[X] + b^2 Var[Y] + 2ab\, cov[X, Y], \tag{2.5}$$

man muß also erstens die Koeffizienten quadrieren, zweitens die Kovarianz berücksichtigen. Allgemeiner also:

$$Var[\mathbf{n}'\tilde{\mathbf{x}}] = Var\left[\sum_{j=1}^{J} n_j \tilde{x}_j\right] = \sum_{j=1}^{J} n_j^2\, Var[\tilde{x}_j] + 2\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{i=j+1}^{J} n_j n_i\, cov[\tilde{x}_j, \tilde{x}_i] \tag{2.6}$$

und das wird, wenn man berücksichtigt, daß die Kovarianz symmetrisch ist, also $cov[\tilde{x}_j, \tilde{x}_i] = cov[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j]$, und die Varianz $Var[\tilde{x}_j]$ sich schreiben läßt als $cov[\tilde{x}_j, \tilde{x}_j]$:

$$Var[\mathbf{n}'\tilde{\mathbf{x}}] = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{J} n_j n_i\, cov[\tilde{x}_j, \tilde{x}_i] = \mathbf{n}'\mathbf{V}_x\mathbf{n}. \tag{2.7}$$

Wenn man den Ausdruck $\mathbf{V}_x\mathbf{n}$ betrachtet, einen Spaltenvektor mit J Einträgen, dann gibt der $j$te Eintrag die Kovarianz des j Assets zum Portfolio $\mathbf{n}$ wieder. Die entsprechenden Ausdrücke für Renditen entnehme man der Tabelle auf Seite 19.

2.2 Geometrische Interpretation

Im folgenden soll eine geometrische Interpretation gegeben werden, die vielleicht einen weiteren anschaulichen und intuitiven Zugang ermöglicht. Die verschiedenen Räume, in denen man sich bewegen kann, sind benannt nach ihren Achsen (ggfls. die vertikale Achse zuerst.)

2.2.1 Der Assetraum

Die Achsen des J-dimensionalen Assetraumes sind die J Assets. In diesen Raum kann man Portfolios einzeichnen, also Kombinationen von Assets. Portfolios, die den gleichen Erwartungswert haben, liegen in einer Hyperebene; Portfolios mit gleicher Varianz auf einem Hyperellipsoid.

Portfolios

In diesen Raum lassen sich nun Portfolios einzeichnen, für $J = 3$ z. B. $\mathbf{n} = (4, 6, 9)$ für ein Portfolio, das 4 Einheiten von Asset eins, 6 von Asset zwei, und 9 von Asset drei enthält. Normierte Portfolios, also Portfolios mit einem Gesamteinsatz von einer Einheit, liegen in einer $J - 1$-dimensionalen Hyperebene, die durch die Einschränkung $\hat{\mathbf{n}}'\mathbf{p} = 1$ gegeben ist. (Siehe Bild 4.1 auf Seite 61.) Damit sind noch $J - 1$ Freiheitsgrade gegeben; wenn man $J - 1$ Anteile gewählt hat, ist der Jte determiniert. Diese Hyperebene enthält offenbar alle Einheitsvektoren $(1/p_1, 0, \ldots, 0)', (0, 1/p_2, 0, , \ldots, 0)', \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1/p_J)'$.

Zustände

Ebenso kann man die realisierte Ausprägungen aller Assets $\mathbf{x}(s)$ in einem konkreten Zustand s einzeichnen. Angenommen, es gebe nur drei Zustände der Wirtschaft im Modell in der nächsten Periode, $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, s_3\}$, dann kann man die Auszahlung aller Assets im Zustand s_1 als einen Punkt $\mathbf{x}(s_1)$ in den Assetraum einzeichnen. Dies sei ein Zustandsvektor, und es gibt so viele Zustandsvektoren im Assetraum wie es mögliche Zustände in der nächsten Periode gibt. Die Auszahlung im Zustand s eines Assets j ist der Achsenabschnitt des Zustandvektors auf Achse j.

Gewichtet man die Zustandsvektoren mit ihren Wahrscheinlichkeiten $P(s)$, dann ist der Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}_x = \sum_{s \in \mathcal{S}} P(s)\mathbf{x}(s)$ einfach der Schwerpunkt der Zustandsvektoren.

Beim Übergang zu unendlichen vielen Zuständen, letztlich zu einer kontinuierlichen Verteilung, etwa einer gemeinsamen Normalverteilung, verschwimmt diese Punktwolke zu einer kontinuierlichen „Suppe“, die mal dichter, mal weniger dicht ist, aber insgesamt ein Gewicht von eins hat, und deren Schwerpunkt immer noch der Erwartungswert der Assetauszahlungen ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Auszahlungen der Assets in einem bestimmten Volumen landet, ist dann gleich dem Gewicht der „Suppe" in dem Volumen.

Wenn es ein risikoloses Asset gibt, also $J+1$ Assets ingesamt, dann ist der Assetraum $J+1$-dimensional. Da aber die Auszahlung des risikolosen Assets in allen Zuständen gleich ist, liegen alle Zustandsvektoren in einer J-dimensionalen Hyperebene, die beschrieben ist durch $(1, 0, \ldots, 0)'\mathbf{x}(s) = 1$.

Isomearen

Der Erwartungswert eines Portfolios $\mathbf{n}$ ist ja $\mathbf{n}'\boldsymbol{\mu}_x$, also das Skalarprodukt des Portfoliovektors mit dem Erwartungswertvektor. Das ist proportional zur Projektion des Portfoliovektors auf den Erwartungswertvektor. Alle Portfoliovektoren mit gleicher Projektion auf den Erwartungswertvektor haben also den gleichen Erwartungswert.

Es gilt also, daß im J-dimensionalen Assetraum Portfolios gleichen Erwartungswertes auf $(J-1)$-dimensionalen Hyperebenen liegen, die man nach Markowitz [44] als *Isomearen* bezeichnen kann. Bewegt man sich parallel zum Erwartungswertvektor, dann ändert sich der Erwartungswert, bewegt man sich orthogonal zu ihm, nicht. Man hat also für große J viele Freiheitsgrade, daß Portfolio umzuschichten, ohne seinen Erwartungswert zu ändern.

Isovarianzflächen

Ähnlich findet man durch eine „somewhat less simple application of analytic geometry"[44], daß Punkte gleicher Varianz auf (ebenfalls nach Markowitz als *Isovarianzflächen* bezeichneten) $(J-1)$-dimensionalen Ellipsoiden liegen.[10]

Schneidet man die J-dimensionale Isovarianzellipsoide mit der $J-1$-dimensionalen Hyperebene der normierten Portfolios $\mathbf{n}'\mathbf{p} = 1$, so bleiben $J-1$-dimensionale Isovarianzellipsoide übrig[11]. Schneidet man diese $J-1$-dimensionale Isovarianzellipsoide mit einer $J-1$-dimensionalen

[10] Die Gleichung einer Isovarianzfläche mit fester Varianz $v_0 > 0$ ist nämlich

$$\mathbf{n}'\mathbf{V}_x\mathbf{n} = v_0 \tag{2.8}$$

Es sei angenommen, daß $\mathbf{V}_x$ eine Kovarianzmatrix von linear unabhängigen Assets ohne risikolosen Asset ist. Dann ist $\mathbf{V}_x$ nonsingulär, symmetrisch, und positiv definit. Man kann dann eine Hauptachsentransformation durchführen dergestalt, daß $\mathbf{A} = \mathbf{C}'\mathbf{V}_x\mathbf{C}$ Diagonalgestalt hat und die Matrix $\mathbf{C}$ orthogonal ist. Mit $\mathbf{z} := \mathbf{C}'\mathbf{n}$ gilt dann:

$$\mathbf{n}'\mathbf{V}_x\mathbf{n} = \mathbf{n}'\mathbf{C}\mathbf{C}'\mathbf{V}_x\mathbf{C}\mathbf{C}'\mathbf{n} = \mathbf{z}'\mathbf{A}\mathbf{z} = v_0 \tag{2.9}$$

$$\iff a_{11}z_1^2 + a_{22}z_2^2 + \cdots + a_{JJ}z_J^2 = v_0 \text{ mit } a_{jj} > 0 \tag{2.10}$$

Letzteres stellt aber die Gleichung eines Ellipsoids dar.

[11] Alle diese intuitiven Betrachtungen setzen natürlich Gutmütigkeit, Nichtentartung, Regularität und all die übrigen hilfreichen Bedingungen voraus.

Isomearen-Hyperebene $\mathbf{n}'\boldsymbol{\mu}_x = \mu_0$, so bleiben $J-2$-dimensionale Isomearen-Isovarianzellipsoide übrig. Das Zentrum dieser konzentrischen Isovarianzellipsoide ist nun unter den normierten Portfolios mit dem Erwartungswert μ_0 das mit geringster Varianz: ein Randportfolio also.

Verschiebt man die Isomearen entlang dem Erwartungswertvektor, ändert man also den Erwartungswert, so ist das Zentrum der Isovarianzellipsoide wieder ein Randportfolio, und nach und nach bekommt man durch diese Verschiebung alle Randportfolios. Die Anschauung schlägt vor, daß diese Randportfolios alle auf einer Geraden liegen, und die Analyse später zeigt, daß diese Intuition richtig ist.

Indifferenzflächen

Man kann schließlich noch mehr in den Assetraum legen, nämlich den Nutzen. Angenommen, die Präferenzen eines Investors i lassen sich ausdrücken durch eine Nutzenfunktion $U^i_{\mathcal{Y}}$, die Portfolios bewertet. Diese Nutzenfunktion schreibt dem Portfolio einen Nutzen zu.

Indifferenzflächen sind dann beschrieben durch $U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{y}) = const.$ Über ihre Form kann hier noch nichts gesagt werden.

Wenn die Investoren Portfolios nur nach Erwartungswert und Varianz beurteilen, dann muß jedes Isomear-Isovarianzellipsoid vollständig in einer Indifferenzfläche liegen.

2.2.2 Der Zustandsraum

Hier sind die verschiedenen Zustände $s \in \mathcal{S}$ die Achsen.

Man kann einen Vektor in diesen Raum legen, sei er $\mathbf{q}$ genannt, mit $\mathbf{q} \geq 0$ und $\mathbf{q}'\mathbf{1} = 1$, dessen Achsenabschnitte q_s angeben, wie hoch die Eintrittswahrscheinlichkeit des entsprechenden Zustandes s ist.

Ein bestimmtes Asset j ist ein Punkt in diesem Raum, und die Achsenabschnitte geben an, wieviel dieses Asset in einem bestimmten Zustand zahlt. Nun kann man ein Skalarprodukt definieren[12]

$$< \mathbf{j}, \mathbf{k} > := \mathbf{j}'\, diag[\mathbf{q}]\, \mathbf{k} = \sum_{s \in \mathcal{S}} q_s j_s k_s \tag{2.11}$$

und damit ist die erwartete Auszahlung gerade das Skalarprodukt eines Assets mit dem Einsenvektor $\mathbf{1}$, und die Länge des Vektors $\mathbf{j} - \mu_j \mathbf{1}$ gerade der Standardabweichung des Assets, und der Kosinus des Winkels zwischen zwei Assets gleich ihrer Korrelation.

[12] $diag[\mathbf{q}]$ bezeichnet die Diagonalmatrix, in der die Elemente der Hauptdiagonalen gerade die Elemente des (Wahrscheinlichkeits)vektors $\mathbf{q}$ sind. Sie sind gerade die Eigenwerte der Matrix, und da sie alle positiv sind, ist die Matrix positiv definit, es handelt sich also um ein Skalarprodukt.

Ein normiertes Portfolio zweier Assets liegt auf der Geraden durch die beiden Assets, und ein aus mehreren Assets ohne Leerverkäufe entstandenes Portfolio liegt in dem durch die Assets aufgespannten Simplex.

In diesem Raum wird sehr vieles sehr anschaulich, dennoch wird hier nicht weiter darauf eingegangen.

2.2.3 μ-σ-Raum und μ-σ^2-Raum

Hier wird auf der vertikalen Achse der Erwartungswert und auf der horizontalen Standardabweichung oder Varianz eines Portfolios aufgetragen.

Natürlich tragen diese beiden Räume die gleiche Information, dennoch sind sie komplementär insofern, als mancher Zusammenhang eher in dem einen oder anderen Raum einfach darstellbar ist.

Bei der graphischen Interpretation des Portfoliorandes wird später ausführlich auf diese beiden Räumen eingegangen, siehe Unterabschnitt 4.2.4 und folgende.

Kapitel 3

Die Investoren und ihr Nutzen

Das CAPM gilt genau dann, wenn die Präferenzen der Investoren zumindest indirekt nur Erwartungswert und Varianz ihres Endvermögens berücksichtigen.[1] Dieses Verhalten wird hier als μ-σ-Präferenz bezeichnet. Hier soll zunächst eine entscheidungstheoretisch fundierte Ableitung solchen Verhaltens gegeben werden.[2]

Das Hauptresultat ist: Der Investor habe Präferenzen über Portfolios. Wenn es wenigstens drei Assets gibt, darunter das risikolose, dann weist der Investor μ-σ-Präferenz auf genau dann, wenn er mehr des risikolosen Assets stets vorzieht und strikt varianzavers[3] ist.

In einem weiteren Abschnitt soll untersucht werden, unter welchen Umständen μ-σ-Präferenz kompatibel ist mit Erwartungsnutzenmaximierung[4].

3.1 Nutzenfunktionen

Die Investoren müssen wählen, und es ist plausibel anzunehmen, daß sie das tun, was ihnen optimal erscheint. Das wird meist so modelliert, daß sie ihren Nutzen maximieren. Der Nutzen ist dabei eine Funktion, die ihre

[1] Siehe Berk [2].

[2] Sie stützt sich im wesentlichen auf Bücher von Jarrow [31], Huang/Litzenberger [23], Ingersoll [29], und Löffler [39].

[3] „varianzavers“ wie hier definiert ist nicht gleichzusetzen mit „risikoavers“.

[4] Eine Frage ist, wann sich der Erwartungsnutzen einer Zufallsvariablen als Funktion nur des Erwartungswertes und der Varianz der Zufallsvariablen schreiben läßt.

Eine weitere Frage ist, wann Erwartungswert und Varianz einer unbekannten linearen Kombination von bekannt multivariat verteilten Zufallsvariabeln die gesamte Verteilung der Kombination determinieren.

Eine andere Frage ist, wann alle Investoren, die ihren Erwartungsnutzen maximieren, effiziente Portfolios wählen, also Portfolios, die maximalen Erwartungswert für die gewählte Varianz aufweisen.

Alternativen bewertet, indem diese Alternativen auf die relle Achse abgebildet werden. Die Nutzenfunktion ist aber kein primitives Konzept. Was zuerst vielmehr nur unterstellt wird, ist, daß der Investor zu zwei Alternativen angeben kann, welche er vorzieht. Folgende Fragen sollen nun besprochen werden: Was sind diese Alternativen (z. B. Portfolios, oder Konsumniveau zu verschiedenen Zeitpunkten)? Und wie gelangt man vom Vergleich je zweier Alternativen zu einer Nutzenfunktion? Und wie extrahieren diese Nutzenfunktionen aus einer (beliebig komplexen) Alternative *eine* Zahl, den Nutzen?

3.1.1 Sicherheit

Die oben genannten Probleme werden erst unter Sicherheit betrachtet, der Zufall kommt also noch nicht ins Spiel, und der Investor weiß genau, was ihm verschiedene Alternativen bieten.

Gegenstände der Wahl

Es gibt ein oder mehrere Güter, und der Investor betrachtet Güterbündel, also Bündel mit bestimmten Mengen der jeweiligen Güter.

In der Kapitalmarkttheorie werden im allgemeinen alle verfügbaren Güter in eines kollabiert, *das* Konsumgut, oder *das* Vermögen[5]. Andererseits wird in der Kapitalmarkttheorie Konsum *zu unterschiedlichen Zeitpunkten* als „verschiedene“ Güter interpretiert, d. h. der Investor wählt nicht zwischen Äpfeln und Birnen, sondern zwischen Obst heute oder Obst morgen.

Die Menge der sicheren Alternativen ist hier die Menge der Güterbündel, die der Investor bewerten kann. Ihm stehen nicht notwendigerweise alle Alternativen offen.[6]

Definition (Menge der sicheren Alternativen). Gegeben N Güter[7], ist eine sichere Alternative ein Güterbündel, also ein bestimmter Vektor $\mathbf{c}$ des $\mathbb{R}^N$, und die Menge aller sicheren Alternativen $\mathcal{C}$ sei eine konvexe und geschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$.

[5] Diese Unterscheidung kann wichtig werden, da Vermögen negativ werden kann, Konsum aber nicht sinnvollerweise. Je nachdem muß man also Nichtnegativitätsbedingungen auferlegen (daß die Investoren ihre Portfolios also wählen unter der Nebenbedingung, daß die Auszahlung nicht negativ werden kann — dazu reicht es nicht, daß die Assets beschränkte Haftung haben, denn ein Portfolio von Assets (das Leerverkäufe enthält) kann dann immer noch negativ werden) und es gibt Versuche, damit den in empirischen Untersuchungen gefundenen „Size-Effect“ zu erklären [39].

[6] Er mag sich einen Rolls Royce nicht leisten können, kann ihn aber dennoch bewerten, und weiß, daß er ihn einem VW vorzieht (Komplikationen durch Firmenmerger werden hier wie so vieles außer acht gelassen).

[7] Später, im zeitkontinuierlichen Fall, wird der Konsum zu überabzählbar unendlich vielen Zeitpunkten, also überabzählbar unendlich viele Güter betrachtet. Entsprechende Annahmen (Additivität, Separabilität) vereinfachen die Nutzenfunktion so, daß sie handhabbar wird.

Präferenzen

Der Investor betrachtet also diese Menge der sicheren Alternativen und vergleicht sie. Insbesondere kann er für je zwei Alternativen sagen, welche er vorzieht, oder ob er indifferent ist. Es wird also angenommen, daß er Präferenzen über die Alternativen hat, und die werden in einer Relation modelliert:

Definition (Präferenzenspiegelnde Relation). Eine Relation $\succeq_i$, also eine Teilmenge[8] von $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ spiegelt die Präferenzen des Investors i, wenn gilt: Ein Paar sicherer Alternativen $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ist genau dann Element von $\succeq_i$, geschrieben $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \in \succeq_i$ oder kurz $\mathbf{c}_1 \succeq_i \mathbf{c}_2$, wenn der Investor i schwach $\mathbf{c}_1$ über $\mathbf{c}_2$ präferiert.

Außerdem seien starke Präferenz und Indifferenz wie üblich definiert als

$$\mathbf{c}_1 \succ_i \mathbf{c}_2 :\Longleftrightarrow \mathbf{c}_1 \succeq_i \mathbf{c}_2 \ \wedge \ \mathbf{c}_2 \not\succeq_i \mathbf{c}_1 \tag{3.1}$$

$$\mathbf{c}_1 \simeq_i \mathbf{c}_2 :\Longleftrightarrow \mathbf{c}_1 \succeq_i \mathbf{c}_2 \ \wedge \ \mathbf{c}_2 \succeq_i \mathbf{c}_1 \tag{3.2}$$

Diese Relation bezieht sich natürlich auf einen bestimmten Investor i.

Diese Relation $\succeq_i$ ist für eine analytische Behandlung etwas umständlich. Daraus ergibt sich die Frage, unter welchen Umständen es Funktionen $\mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$ gibt, die diese sicheren Alternativen so bewerten, daß die Präferenzen erhalten bleiben. Dann hat man die Alternativen auf die reellen Zahlen abgebildet und kann mit analytischen Methoden das Maximum suchen.

Definition (Nutzenfunktion). Eine Funktion $U^i : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$ ist präferenzerhaltend und damit eine Nutzenfunktion für Investor i, wenn gilt:

$$U^i(\mathbf{c}_1) \geq U^i(\mathbf{c}_2) \iff \mathbf{c}_1 \succeq_i \mathbf{c}_2 \tag{3.3}$$

Wir betrachten also Funktionen, die jeder Alternative eine reelle Zahl zuordnen, und für Nutzenfunktionen gilt, daß für je zwei Alternativen die bevorzugte die höhere Zahl hat.

Es ist nicht von vorneherein klar, daß eine solche Funktion existiert, vielmehr muß dazu den Präferenzen Struktur auferlegt werden. Es wird angenommen, daß die Präferenzen des Investors einigen Rationalitätsannahmen folgen:

Annahme 3.1.1 (Reflexivität). *Für alle $c \in \mathcal{C}$ gelte:* $\mathbf{c} \succeq \mathbf{c}$

Annahme 3.1.2 (Vergleichbarkeit). *Für alle $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathcal{C}$ gelte:*

$$\mathbf{c}_1 \succeq \mathbf{c}_2 \ \vee \ \mathbf{c}_2 \succeq \mathbf{c}_1.$$

Annahme 3.1.3 (Transitivität). *Für alle $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 \in \mathcal{C}$ gelte:*

$$\mathbf{c}_1 \succeq \mathbf{c}_2 \wedge \mathbf{c}_2 \succeq \mathbf{c}_3 \ \Rightarrow \ \mathbf{c}_1 \succeq \mathbf{c}_3.$$

[8] Jedes geordnete Paar von sicheren Alternativen ist also entweder enthalten oder nicht.

Diese Annahmen sind nicht immer völlig unproblematisch[9], sollen hier aber nicht weiter besprochen werden. Eine präferenzenspiegelnde Relation, die diesen Annahmen 3.1.1 bis 3.1.3 genügt, heißt Präferenzrelation. Sie erlaubt schon die Partitionierung der Alternativen in Äquivalenzklassen, also Indifferenzklassen. Für die Existenz einer Nutzenfunktion fehlt aber noch eine Annahme[10]:

Annahme 3.1.4 (Stetigkeit). *Für jede sichere Alternative* $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ *sind die Menge der strikt vorgezogenen und die Menge der strikt schlechteren Alternativen beide offen.*

Oft (z. B. bei Jarrow [31]) werden statt der Stetigkeit zwei etwas komplexere Annahmen angenommen, nämlich die sicheren Äquivalente der Annahmen 3.1.9 *Ordnungserhalt* und 3.1.10 *Mittelwert*, aber Debreu [14] zeigte 1954, daß die obige Annahme der Stetigkeit ausreicht für diesen Satz:

Satz 1 (Ordinale Nutzenfunktion für sichere Alternativen). *Erfüllt eine Präferenzrelation die Annahmen 3.1.1 bis 3.1.4, so gibt es eine Funktion* $U_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$*, die präferenzerhaltend ist, also eine ordinale Nutzenfunktion für sichere Alternativen.*

Wenn man also je zwei Alternativen vergleichen kann und angeben kann, welche besser ist, dabei transitiv ist, und die Relation stetig ist, dann kann man jeder Alternativen eine Zahl zuordnen, so daß man Alternativen mit höherer Zahl denen mit niedrigerer Zahl vorzieht. Man kann sie also linear an*ordnen*, daher ordinale Nutzenfunktion. Die absolute Größe der Zahl, oder die Entfernung zwischen den Zahlen ist völlig irrelevant.

Nutzen von Portfolios

Es sei hier angemerkt, daß man die Assets als Güter betrachten kann und dann die Präferenzen der Investoren über sichere Kombinationen dieser Güter untersuchen kann — also über Portfolios. Obwohl die Auszahlung unsicher ist, betrachtet man einfach die Wahl zwischen Assets, und damit eine Wahl unter Sicherheit.

Dann ist die Menge der sicheren Alternativen gleich der Menge der gehandelten Portfolios, $\mathcal{C} = \mathcal{Y}$, und die obigen vier Annahmen reichen aus, um die Existenz einer ordinalen Nutzenfunktion über Portfolios zu garantieren. Diese Nutzenfunktion, $U_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R}$, schreibt also Punkten im Assetraum (also Portfolios) einen Nutzen zu und ist damit ein skalares Feld (wie die

---

[9] Zur Transitivität betrachte man dieses hübsche Beispiel: Gegeben drei Spielwürfel A,B,C, die folgende Zahlen tragen: $A : (3\,3\,3\,3\,3\,3)$, $B : (1\,1\,4\,4\,4\,4)$, $C : (2\,2\,2\,2\,5\,5)$. Man würfelt gegen einen Gegner, wer die höhere Zahl hat, gewinnt. Man betrachte nun jeweils zwei Würfel, entscheide, welchen man vorzieht, und grüble dann über seine Rationalität.

[10] Diese Annahme schließt z. B. lexikographische Halbordnungen aus, für die sich keine Nutzenfunktionen finden lassen.

Temperatur), und der optimierende Investor bewegt sich in Richtung höheren Nutzens, bis er an seine Budgetbegrenzung stößt.

Einige Zusatzannahmen können dann auch in diesem Rahmen (Betrachtung von Portfolios) zu einer *Erwartungsnutzendarstellung* führen, siehe Leontieff [35] und Wakker [64]. Dieser Weg soll hier nicht beschritten werden. Hier wird vielmehr im Rahmen der Betrachtung von Portfolios das *μ-σ-Kriterium* hergeleitet. Erwartungsnutzenmaximierung wird der Vollständigkeit halber wie im Bereich des Finance üblich im Rahmen von Lotterien im folgenden Abschnitt kurz besprochen.[11]

3.1.2 Unsicherheit

Gegenstände der Wahl

Unter Unsicherheit weiß man nicht sicher, wieviel man morgen konsumieren kann, man hat nur eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben, also eine Zufallsvariable. Allgemeiner ist eine unsichere Alternative eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung über die N Güter, also ein N-dimensionaler Zufallsvektor.

Der Investor vergleicht damit nicht mehr sichere Alternativen, sondern unsichere Alternativen. Damit ist:

Definition (Menge der unsicheren Alternativen). Die Menge der unsicheren Alternativen $\tilde{\mathcal{C}}$ ist die Menge der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilungen[12] über $\mathcal{C}$.

Man braucht jetzt noch das Konzept einer Lotterie zwischen zwei unsicheren Alternativen:

Definition (Lotterie). Für alle $\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2 \in \tilde{\mathcal{C}}$ und $p \in [0, 1]$ ist $L(\tilde{\mathbf{c}}_1, \alpha, \tilde{\mathbf{c}}_2)$ eine Lotterie, die mit Wahrscheinlichkeit α die erste unsichere Alternative

[11] Die Axiomatik für Portfolios und für Lotterien ist nicht unbedingt die gleiche. Bei Lotterien wird z.B. angenommen, daß alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen existieren, während die Auszahlung von Portfolios ja aus endlich vielen Assets generiert wird. Bei Lotterien sind Wahrscheinlichkeiten wählbar, bei Portfolios Auszahlungen. Lotterien kann man mischen, Portfolios kann man zusammenlegen und vervielfachen. Wakker, Leontieff, Debreu benutzen Portfolios; von-Neumann-Morgenstern, Jarrow, Huang/Litzenberger, (auch Duffie) (und praktisch alle in Finance) dagegen Lotterien. Also:

Bei Portfolios kommt man mit Wakkers [64] System zum Erwartungsnutzen, und mit Varianzaversion (Duffie [15], Löffler [40]) zu μ-σ-Präferenz.

Bei Lotterien liefert das von-Neumann-Morgenstern-System Erwartungsnutzen, und was in diesem Modell auf μ-σ-Präferenz führen kann, ist in Abschnitt 3.4 beschrieben.

[12] Dies impliziert, daß hier nur zustandsunabhängige Nutzenfunktionen betrachtet werden. Zwei Zufallsvektoren also, die verschieden sind insofern als sie in manchen Zuständen unterschiedliche Auszahlungen haben, aber gleich verteilt sind, betrachtet der Investor als austauschbar. Anders gesagt, es kommt dem Investor nur darauf an, wieviel von welchem Gut er zur Verfügung hat, nicht aber, in welchem Zustand sich die Welt befindet (man kann natürlich einige Charakteristika der Welt (Frieden etc.) als Güter definieren, die in den Nutzenkalkül des Investors eingehen, um naheliegenden Einwänden vorzubeugen). Für ein Beispiel siehe Glossar, Seite 149.

ergibt, und mit der Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ die zweite. [13]

Lotterien können verschieden definiert werden, auf jeden Fall ist es nötig, daß folgende Postulate zutreffen:

Annahme 3.1.5 (Lotterien aus den unsicheren Alternativen). *Für alle* $\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2 \in \tilde{\mathcal{C}}$ *und alle* $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$ *gelte:*

- $L(\tilde{\mathbf{c}}_1, \alpha, \tilde{\mathbf{c}}_2) \in \tilde{\mathcal{C}}$
- $L(\tilde{\mathbf{c}}_1, \alpha, \tilde{\mathbf{c}}_1) = \tilde{\mathbf{c}}_1$
- $L(\tilde{\mathbf{c}}_1, 1, \tilde{\mathbf{c}}_2) = \tilde{\mathbf{c}}_1$
- $L(\tilde{\mathbf{c}}_1, \alpha, \tilde{\mathbf{c}}_2) = L(\tilde{\mathbf{c}}_2, 1-\alpha, \tilde{\mathbf{c}}_1)$
- $L(L(\tilde{\mathbf{c}}_1, \alpha, \tilde{\mathbf{c}}_2), \beta, L(\tilde{\mathbf{c}}_1, \gamma, \tilde{\mathbf{c}}_2)) = L(\tilde{\mathbf{c}}_1, (\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma), \tilde{\mathbf{c}}_2)$

Diese Postulate garantieren nur einige Dinge, die man intuitiv ohnehin annehmen würde.

Verschiedene Nutzenfunktionen, Erwartungsnutzen

Wieder kann der Investor zwei Alternativen vergleichen, und es gibt eine präferenzenspiegelnde Relation. Die Frage ist, unter welchen Umständen es Nutzenfunktionen gibt. Es kann nun verschiedene Arten von Nutzenfunktionen geben, denn es gibt viele Arten, die Menge der unsicheren Alternativen $\tilde{\mathcal{C}}$ auf $\mathbb{R}$ abzubilden.

- Gibt es eine Funktion $U_{\tilde{\mathcal{C}}} : \tilde{\mathcal{C}} \mapsto \mathbb{R}$, die jeder unsicheren Alternative einen Nutzen (eine reelle Zahl) zuschreibt, so daß die Präferenzen erhalten bleiben? Diese Funktion bekommt als Input also unmittelbar eine komplette Wahrscheinlichkeitsverteilung und bewertet diese. Es ist die allgemeinste Nutzenfunktion.[14]
- Gibt es eine Funktion $U_E : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$, die den *sicheren* Alternativen einen Nutzen zuschreibt, so daß $E[U_E]$ präferenzerhaltend ist? Es ist also die allgemeine Funktion oben hier gerade $U_{\tilde{\mathcal{C}}}(\tilde{c}) = E[U_E(\tilde{c})]$. Die Funktion U_E ist eine *von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion*, sie bekommt als Input sichere Alternativen und bewertet sie, und von diesem Wert wird der Erwartungswert gebildet: Der *Erwartungsnutzen.*

[13] Es können also die Wahrscheinlichkeitsverteilungen addiert werden, wenn $F_1(\mathbf{c})$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung der ersten unsicheren Alternative ist, und $F_2(\mathbf{c})$ entsprechend der zweiten, dann ist die Verteilung der Lotterie

$$F_L(\mathbf{c}) := \alpha F_1(\mathbf{c}) + (1-\alpha)F_2(\mathbf{c}).$$

[14] Noch allgemeiner ist höchstens die zustandsabhängige Nutzenfunktion (siehe Seite 149).

- Gibt es (wenn es um ein Gut geht, also $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$) eine Funktion $U_{\mu\sigma} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, die den unsicheren Alternativen nur aufgrund von Erwartungswert und Varianz einen Nutzen zuschreibt, so daß die Präferenzen erhalten bleiben? Diese Funktion bekommt als Input also nicht die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung, sondern nur zwei Zahlen, die sie beschreiben, und bewertet nur diese zwei Zahlen. Das bedeutete, daß die Investoren die Alternativen nur nach ihren ersten beiden Momenten beurteilen.

Die erste Frage (ordinale Nutzenfunktion) ist mit ja zu beantworten unter recht schwachen Annahmen, siehe folgenden Unterabschnitt. Mit einigen weiteren, schon etwas stärkeren Annahmen gelangt man dann zum Erwartungsnutzen, Frage zwei. Die dritte Frage ist etwas komplexer, ihr ist Abschnitt 3.4 ab Seite 43 gewidmet, sie ist aber auf jeden Fall mit ja zu beantworten, wenn die von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion quadratisch ist oder die Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Normalverteilungen eingeschränkt ist. Nun aber zur ersten Frage:

Ordinale Nutzenfunktion

Folgende sechs Annahmen sind hinreichend für die Existenz einer ordinalen Nutzenfunktion der unsicheren Alternativen:

Annahme 3.1.6 (Reflexivität). *Für alle* $\tilde{\mathbf{c}} \in \tilde{\mathcal{C}}$ *gelte:* $\tilde{\mathbf{c}} \succeq \tilde{\mathbf{c}}$

Annahme 3.1.7 (Vergleichbarkeit). *Für alle* $\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2 \in \tilde{\mathcal{C}}$ *gelte:*
$$\tilde{\mathbf{c}}_1 \succeq \tilde{\mathbf{c}}_2 \ \vee \ \tilde{\mathbf{c}}_2 \succeq \tilde{\mathbf{c}}_1.$$

Annahme 3.1.8 (Transitivität). *Für alle* $\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2, \tilde{\mathbf{c}}_3 \in \tilde{\mathcal{C}}$ *gelte:*
$$\tilde{\mathbf{c}}_1 \succeq \tilde{\mathbf{c}}_2 \ \wedge \ \tilde{\mathbf{c}}_2 \succeq \tilde{\mathbf{c}}_3 \ \Rightarrow \ \tilde{\mathbf{c}}_1 \succeq \tilde{\mathbf{c}}_3.$$

Annahme 3.1.9 (Ordnungserhalt). *Für alle* $\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2 \in \tilde{\mathcal{C}}$ *mit* $\tilde{\mathbf{c}}_1 \succ \tilde{\mathbf{c}}_2$ *und* $p, q \in [0,1]$ *gelte:* $\quad L(\tilde{\mathbf{c}}_1, \alpha, \tilde{\mathbf{c}}_2) \succ L(\tilde{\mathbf{c}}_1, \beta, \tilde{\mathbf{c}}_2) \iff \alpha > \beta.$

Dieses Axiom behauptet also, daß man bei einer Lotterie zwischen zwei Alternativen vorzieht, die bessere Alternative mit einer höheren Wahrscheinlichkeit zu bekommen.

Annahme 3.1.10 (Mittelwert). *Für alle* $\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2, \tilde{\mathbf{c}}_3 \in \tilde{\mathcal{C}}$ *mit* $\tilde{\mathbf{c}}_1 \succ \tilde{\mathbf{c}}_2 \succ \tilde{\mathbf{c}}_3$ *existiere genau ein* $\alpha \in (0,1)$ *mit:* $\quad L(\tilde{\mathbf{c}}_1, \alpha, \tilde{\mathbf{c}}_3) \simeq \tilde{\mathbf{c}}_2.$

Diese Annahme behauptet, daß, wenn man eine bessere und schlechtere Alternative zu einer ursprünglichen Wahl hat, man (genau) eine Wahrscheinlichkeit finden kann, so daß man indifferent ist zwischen der ursprünglichen Wahl und der Lotterie zwischen besserer und schlechterer Alternative.

Mit diesen Annahmen läßt sich die erste Aussage treffen, über die Existenz einer ordinalen Nutzenfunktion, die (unsichere) Alternativen (also Wahrscheinlichkeitsverteilungen) unmittelbar bewertet (ihnen eine reelle Zahl zuweist), so daß die Präferenzen erhalten bleiben. [15]

Satz 2 (Existenz einer ordinalen Nutzenfunktion). *Erfüllt eine Präferenzrelation $\succeq$ über die Menge unsicherer Alternativen $\tilde{\mathcal{C}}$ die Annahmen 3.1.6 bis 3.1.10, dann gibt es eine Funktion $U_{\tilde{\mathcal{C}}} : \tilde{\mathcal{C}} \mapsto \mathbb{R}$, die präferenzerhaltend ist, also eine ordinale Nutzenfunktion.*

Sowohl die Präferenzrelation als dann auch die Nutzenfunktion sind für verschiedene Investoren i. allg. verschieden. Und gegeben eine Präferenzrelation eines bestimmten Investors, so kann man dafür auch verschiedene ordinale Nutzenfunktionen finden. In der Tat, wenn U eine ordinale Nutzenfunktion ist, dann ist jede streng monoton steigende Transformation davon wieder eine ordinale Nutzenfunktion für diese Präferenzrelation (also diesen Investor):

Satz 3 (Transformation einer ordinalen Nutzenfunktion). *Gegeben eine ordinale Nutzenfunktion $U_{\tilde{\mathcal{C}}} : \tilde{\mathcal{C}} \mapsto \mathbb{R}$ für eine Präferenzrelation $\succeq$ gemäß Annahmen 3.1.6 bis 3.1.10.*

Dann gilt für alle streng monoton steigende Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, d. h. f mit $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$, daß $U^*_{\tilde{\mathcal{C}}} = f(U_{\tilde{\mathcal{C}}})$ wieder eine präferenzerhaltende ordinale Nutzenfunktion für $\succeq$ ist.

Kardinale Nutzenfunktion

Mit einem weiteren Axiom ist man bei kardinalen Nutzenfunktionen angelangt:

Annahme 3.1.11 (Starke Unabhängigkeit). *Für alle $\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2, \tilde{\mathbf{c}}_3 \in \tilde{\mathcal{C}}$ mit $\tilde{\mathbf{c}}_1 \succ \tilde{\mathbf{c}}_2$ und für alle $\alpha \in (0, 1)$ gelte:*

$$L(\tilde{\mathbf{c}}_1, \alpha, \tilde{\mathbf{c}}_3) \succ L(\tilde{\mathbf{c}}_2, \alpha, \tilde{\mathbf{c}}_3).$$

Dieses Axiom ist schon etwas problematischer. Es besagt im wesentlichen, daß die Einführung von Unsicherheit die Präferenzen nicht ändert — wenn man unter zwei ursprünglichen Alternativen eine gewisse Vorliebe hat, und dann beide in eine Lotterie mit einer beliebigen dritten Alternative wirft, dann bleibt die Präferenz wie zuvor. Interessanterweise ist dieses Axiom empirisch nicht haltbar, z. B. im Allais-Paradox (siehe [23, Abschnitt 1.14]). [16]

Gilt also auch diese Annahme für eine Präferenzrelation, so läßt sich zeigen, daß es eine kardinale Nutzenfunktionen dafür gibt:

[15] Beweis in Jarrows Buch [31].

[16] Daher sind die Arbeiten von Duffie [15, Kapitel 11D] und die von Löffler [40] hervorzuheben, die beide das Konzept des Erwartungsnutzen nicht benötigen, um μ-σ-Präferenz abzuleiten, dazu später mehr.

Satz 4 (Existenz einer kardinalen Nutzenfunktion). *Erfüllt eine Präferenzrelation $\succeq$ über die Menge unsicherer Alternativen $\tilde{\mathcal{C}}$ die Annahmen 3.1.6 bis 3.1.11, dann gibt es eine Funktion $U_{\tilde{\mathcal{C}}} : \tilde{\mathcal{C}} \mapsto \mathbb{R}$, die präferenzerhaltend ist, und für die außerdem gilt, daß:*

Für alle $\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2 \in \tilde{\mathcal{C}}$ und alle $\alpha \in [0,1]$:

$$U_{\tilde{\mathcal{C}}}(L(\tilde{\mathbf{c}}_1, \alpha, \tilde{\mathbf{c}}_2)) = \alpha U_{\tilde{\mathcal{C}}}(\tilde{\mathbf{c}}_1) + (1-\alpha) U_{\tilde{\mathcal{C}}}(\tilde{\mathbf{c}}_2). \tag{3.4}$$

$U_{\tilde{\mathcal{C}}}$ ist also eine kardinale *Nutzenfunktion.*

Hier kommt Gleichung (3.4) hinzu, die im wesentlichen sagt, daß diese kardinale Nutzenfunktion eine lineare Abbildung von $\tilde{\mathcal{C}}$ in $\mathbb{R}$ ist. Dieses Resultat ist es letztlich, das zum Erwartungsnutzen führt, denn was diese letzte Zeile ja sagt, ist, daß der Nutzen einer Lotterie zweier (wohlgemerkt unsicherer) Alternativen gleich ist dem Erwartungswert der Nutzen, die den beiden unsicheren Alternativen einzeln zugeschrieben wird.

Wieder gilt, daß verschiedene Präferenzrelationen natürlich zu verschiedenen Nutzenfunktionen führen, und es auch für ein und dieselbe Präferenzrelation unendlich viele kardinale Nutzenfunktionen gibt. Allerdings sind kardinale Nutzenfunktionen nicht invariant bezüglich beliebiger streng monoton steigender Transformationen, sondern nur bezüglich streng monoton steigender affiner[17] Transformationen:

Satz 5 (Transformation einer kardinalen Nutzenfunktion). *Gegeben eine präferenzerhaltende kardinale Nutzenfunktion $U_{\tilde{\mathcal{C}}} : \tilde{\mathcal{C}} \mapsto \mathbb{R}$ für eine Präferenzrelation $\succeq$ gemäß Annahmen 3.1.6 bis 3.1.11.*

Dann gilt für alle streng monoton steigende affine Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (d. h. $f(x) = \alpha x + \beta$ mit $\alpha > 0$), daß $U^*_{\tilde{\mathcal{C}}} = f(U_{\tilde{\mathcal{C}}})$ wieder eine präferenzerhaltende kardinale Nutzenfunktion für $\succeq$ ist.

Ebenso gilt umgekehrt, daß sich für je zwei kardinale Nutzenfunktionen zu einer Präferenzrelation eine solche Funktion f finden läßt, die sie ineinander überführt.

Erwartungsnutzen

Bisher sind also Bedingungen angegeben worden, unter welchen sich unsichere Alternativen präeferenzerhaltend bewerten lassen, es also Funktionen gibt, die eine unsichere Alternative *als ganzes genommen* präferenzerhaltend auf die reelle Achse abbilden. Die bisher betrachteten Nutzenfunktionen bekommen als Input eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der unsicheren Alternative.

Meist wird aber die Erwartungsnutzendarstellung benutzt, also eine Funktion gesucht, die wiederum die *sicheren* Alternativen bewertet, und

[17] Eine affine Funktion ist eine, die sowohl (schwach) konkav als auch (schwach) konvex ist (also hier eine Linie, die aber nicht notwendig durch den Koordinatenursprung gehen muß).

deren Erwartungswert eine unsichere Alternative präferenzerhaltend bewertet. Es fehlt noch eine Annahme, um eine Erwartungsnutzendarstellung zu garantieren, sie besagt im wesentlichen, daß der Nutzen ähnlicher unsicherer Alternativen nicht zu abrupt voneinander abweicht:

Annahme 3.1.12 (Stetigkeit). *Wenn die Verteilung der $c_1, \ldots, c_n \in \tilde{\mathcal{C}}$ gegen $\tilde{\mathbf{c}} \in \tilde{\mathcal{C}}$ konvergiert, dann gelte:*

$$\lim_{n \to \infty} U_{\tilde{\mathcal{C}}}(\tilde{\mathbf{c}}_n) = U_{\tilde{\mathcal{C}}}(\tilde{\mathbf{c}}).$$

Damit schließlich und endlich:

Satz 6 (Existenz einer Erwartungsnutzenrepräsentation). *Gegeben eine Präferenzrelation $\succeq$ über die Menge der unsicheren Alternativen $\tilde{\mathcal{C}}$, so daß die Annahmen 3.1.6 bis 3.1.11 erfüllt sind, und eine kardinale Nutzenfunktion[18] $U_{\tilde{\mathcal{C}}}$, so daß auch 3.1.12 erfüllt ist, dann gilt:*
Es gibt eine von-Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion $U_E : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$, die die sicheren Alternativen so bewertet, daß bei Erwartungswertbildung die Präferenzen erhalten bleiben[19]:

$$U_{\tilde{\mathcal{C}}}(\tilde{\mathbf{c}}) = E[U_E(\tilde{\mathbf{c}})]. \tag{3.5}$$

Für endlich viele Zustände kann man den Erwartungsnutzen auch so schreiben:

$$E[U_E(\tilde{\mathbf{c}})] = \sum_{s \in \mathcal{S}} p_s \cdot U_E(\mathbf{c}_s). \tag{3.6}$$

Es gilt also

$$E[U_E^i(\tilde{\mathbf{c}}_1)] \geq E[U_E^i(\tilde{\mathbf{c}}_2)] \iff \tilde{\mathbf{c}}_1 \succeq^i \tilde{\mathbf{c}}_2. \tag{3.7}$$

Dieser meist einfach hingenommene Satz ist eigentlich sehr bemerkenswert, bedeutet er doch, daß man eine ganze *Wahrscheinlichkeitsverteilung*, also eine ganze Funktion $\mathbb{R} \mapsto [0,1]$ zur Bewertung auf eine einzige Zahl reduzieren kann, indem man einfach jedes Konsumniveau gewichtet und den Erwartungswert bildet.

3.2 Präferenzen über Portfolios und μ-σ-Präferenz

Soweit wurden mehrere Möglichkeiten besprochen, das Verhalten der Investoren zu modellieren, und die dazu benötigten Voraussetzungen. Auf jedem

[18] Die Existenz dieser Nutzenfunktion ist ja nach dem letzten Satz dann garantiert.

[19] Genaugenommen müssen von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktionen nach oben beschränkt sein, da man sonst Lotterien konstruieren kann, von denen eine die andere klar dominiert, die aber beide unendlichen Nutzen haben und somit nicht geordnet werden können, also den Präferenzerhalt verletzen. Auf diese Debatte soll hier aber nicht eingegangen werden, siehe dazu Ingersoll [29, Seite 42].

dieser Wege sollen nun bestimmte Verhaltensweisen, wie Habgier und Risikoaversion, beschrieben werden.

Zunächst sei angenommen, daß Investoren die Assets als Güter betrachten und zwischen sicheren Kombinationen dieser Güter wählen, also zwischen Güterbündeln, in diesem Kontext Portfolios genannt. Aus Reflexivität, Vergleichbarkeit, Transitivität und Stetigkeit der Präferenzrelation folgt dann die Existenz einer ordinalen Nutzenfunktion über Portfolios, und wenn man weiter strenge Monotonie im risikolosen Asset annimmt und strenge Varianzaversion, dann läßt sich zeigen, daß der Investor μ-σ-Präferenz aufweist, also die Portfolios nur nach ihrem Erwartungswert und Varianz bewertet, was unmittelbar zum CAPM führt.

In Abschnitt 3.3 sei das Erwartungsnutzenparadigma näher betrachtet, in dem der Investor die Auszahlung eines Portfolios als Gut betrachtet, und Präferenzen über unsichere Auszahlungen hat. Es werden Beziehungen angegeben zwischen Habgier und Risikoaversion (im Sinne der Aversion gegen die Überlagerung einer Auszahlung mit einem fairen Spiel) einerseits und der Form der von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion andererseits.

In Abschnitt 3.4 schließlich wird betrachtet, wann die beiden Konzepte (μ-σ-Präferenz und Erwartungsnutzenmaximierung) kompatibel sind: dazu muß man den Verteilungen der Assetrenditen oder der von-Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion Beschränkungen auferlegen[20].

3.2.1 Präferenzen über Portfolios

Hier wird angenommen, daß der Investor Präferenzen über (nichtnormierte) Portfolios hat, also die Assets einfach als Güter betrachtet, und nun bestimmte Kombinationen davon bewertet. Ein Portfolio $\mathbf{n} \in \mathcal{Y}$ enhält n_j Einheiten (shares) des $j$ten Assets.

Es gebe also eine ordinale Nutzenfunktion $U^i_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R}$, die ein Portfolio $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ bewertet, so daß die Bewertung mit den Präferenzen des Investors i übereinstimmt.[21] Weiter werden folgende Annahmen getroffen:

Annahme 3.2.1 (Risikoloses Asset). *Es gebe $J > 1$ nichtredundante riskante und das risikolose Asset[22], sie seien spezifiziert durch ihre Auszahlung $\tilde{\mathbf{x}}$, wobei die Auszahlung des risikolosen Assets in jedem Zustand 1 ist.*

Annahme 3.2.2 (Vollkommener Markt). *Der Markt sei vollkommen, es gebe also keine Leerverkaufsbeschränkungen[23] und die Assets seien vollständig teilbar. Dann ist $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^{J+1}$.*

[20] Berk klärte 1997 den Fall gemeinsamer Beschränkungen auf Assetrenditen und Nutzenfunktion [2].

[21] Diese Funktion gibt es nach Satz 1, wenn die Präferenzrelation reflexiv, vollständig, transitiv und stetig ist.

[22] Man beachte, daß es insgesamt wenigstens drei Assets geben muß, und da sie linear unabhängig sein sollen, auch mindestens drei Zustände.

[23] Diese Annahme kann fallengelassen werden. Es ist nur notwendig, daß die Menge der

3.2.2 Monotonie im risikolosen Asset

Nun zum Investor. Es wird angenommen, daß er strenge Monotonie im risikolosen Asset zeigt, also mehr des risikolosen Assets vorzieht.[24]

Definition (Strenge Monotonie im risikolosen Asset). Ein Investor i zeigt strenge Monotonie im risikolosen Asset[25], wenn für alle $\alpha > 0$ und alle Portfolios $\mathbf{n}$ gilt:

$$\mathbf{n} + (\alpha, 0, \ldots, 0)' \succ_i \mathbf{n}$$

Also ist ihm, welches Portfolio auch immer er gerade hat, eines, das etwas mehr des risikolosen Assets hat, lieber.

3.2.3 Varianzaversion

Weiterhin wird angenommen, daß der Investor strikt varianzavers ist. Er lehnt also Störportfolios ab, die nur die Varianz seines Portfolios erhöhen, ohne den Erwartungswert zu ändern. Sei zunächst genau definiert, was unter einem Störportfolio (relativ zu einem ursprünglichen Portfolio $\mathbf{n}$) verstanden ist[26]: Es ist die Überlagerung des ursprünglichen Portfolios $\mathbf{n}_0$ des Investors mit einem Portfolio, dessen Auszahlung einen Erwartungswert von Null hat und eine Kovarianz von Null mit dem ursprünglichen Portfolio (sonst könnte es die Varianz des Pakets ja reduzieren). Dabei muß das Portfolio selbst wenigstens ein Asset enthalten, hat also eine Varianz größer Null.

---

gehandelten Portfolios ein konvexer Kegel ist, also eine Teilmenge $\mathcal{Y}$ des $\mathbb{R}^{J+1}$ mit

$$\forall\, \mathbf{n} \in \mathcal{Y}, \forall \alpha > 0 : \quad \alpha \mathbf{n} \in \mathcal{Y} \tag{3.8}$$

$$\forall\, \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \in \mathcal{Y}, \forall \lambda \in [0,1] : \quad \lambda \mathbf{n} + (1-\lambda)\mathbf{n}_1 \in \mathcal{Y}. \tag{3.9}$$

Wenn ein Punkt enthalten ist, dann ist auch die Halbgerade vom Ursprung zu diesem Punkt und weiter enthalten. Außerdem ist für je zwei Punkte die Strecke zwischen diesen Punkten enthalten. Insbesondere ist der gesamte $\mathbb{R}^{J+1}$ ein konvexer Kegel, oder der nichtnegative Quadrant mit $n_j \geq 0$. Damit gilt der Satz auch mit Leerverkaufsbeschränkungen.

[24]Diese Annahme ist unproblematisch. Man beachte allerdings, daß nicht verlangt wird, daß der Investor Monotonie in Assets mit beschränkter Haftung zeigt. Das bedeutet, daß es durchaus passieren kann, daß der Investor ein Asset mit beschränkter Haftung, das ihm also keine Verluste einbringen kann, ablehnt, selbst wenn es ihm geschenkt wird, da ihm die dadurch gestiegene Varianz durch den entsprechend gestiegenen Erwartungswert der Auszahlung nicht ausreichend kompensiert wird. Obwohl es sehr plausibel wäre, zu verlangen, daß der Investor solche Geschenke nicht ablehnt, ist die Forderung nicht zu vereinbaren mit μ-σ-Präferenz — eine ernsthafte Schwäche des Konzepts, auf die interessanterweise erst Nielssen 1987 einging [49].

[25]Nach Vereinbarung Asset 0, also das erste.

[26] Rothschild-Stiglitz verwenden als Störterm ein faires Spiel, das — gegeben die Auszahlung — eine bedingte Erwartung von Null hat. Jedes faires Spiel ist auch ein Störportfolio im hier verwendeten Sinne, aber nicht umgekehrt. Man unterscheide also *Varianz*aversion (Duffie), hier betrachtet, operationalisiert durch Ablehnung von Störportfolios, einerseits, und *Risiko*aversion (Rothschild/Stiglitz), operationalisiert durch Ablehnung von fairen Spielen.

Definition (Störportfolio). $\mathbf{n}_s$ ist ein Störportfolio relativ zu Portfolio $\mathbf{n}_0$, wenn

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_s \neq \mathbf{0} \quad & \wedge \quad E[\tilde{x}_s] = \mathbf{n}_s' \boldsymbol{\mu}_x = 0 \\ & \wedge \quad cov[\tilde{x}_0, \tilde{x}_s] = \mathbf{n}_0' V \mathbf{n}_s = 0 \end{aligned}$$

Der Investor ist strikt varianzavers, wenn er jede Addition eines Störportfolios ablehnt:

Definition (Strenge Varianzaversion). Ein Investor i ist streng varianzavers, wenn für jedes Portfolio $\mathbf{n}_0$ und jedes Störportfolio $\mathbf{n}_s$ relativ dazu gilt:

$$\mathbf{n}_0 + \mathbf{n}_s \prec^i \mathbf{n}_0$$

Diese Bedingung mag harmlos erscheinen, ist aber sehr stark. Der Investor lehnt damit nicht nur faire Spiele ab, sondern alle Additionen zu seinem Portfolio, die den Erwartungswert unverändert lassen, und keine Kovarianz zum ursprünglichen Portfolio haben.

3.2.4 μ-σ-Präferenz

Nun gilt, daß bei Präferenzen über (nichtnormierte) Portfolios strikte Monotonie im risikolosen Asset und strikte Varianzaversion implizieren, daß der Investor Portfolios nur nach Mittelwert und Varianz auswählt, also μ-σ-Präferenz aufweist:

Satz 7 (Varianzaversion impliziert μ-σ-Präferenz). *Es gebe einen vollkommenen Markt, Annahme 3.2.2, mit dem risikolosen und wenigstens zwei riskanten Assets, Annahme 3.2.1. Ein Investor habe Präferenzen über (nichtnormierte) Portfolios $\mathbf{n} \in \mathcal{Y}$ daraus, und seine Präferenzen erfüllen Annahmen 3.1.1 bis 3.1.4.*[27]*. Genau dann, wenn der Investor auch strenge Monotonie im risikolosen Asset 3.2.2 und strenge Varianzaversion 3.2.3 aufweist, dann zeigt er μ-σ-Präferenz, d. h. die Nutzenfunktion $U_{\mathcal{Y}}$ läßt sich schreiben als:*

$$U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{n}) = U_{\mu\sigma}(\mathbf{n}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{n}'\mathbf{V}_x\mathbf{n}),$$

wobei $U_{\mu\sigma}$ streng monoton steigend in der ersten und streng monoton fallend in der zweiten Variablen ist.

Damit ist die μ-σ-Verhaltensregel, die so wesentlich ist für die Herleitung des CAPM, auf elementarere Verhaltensannahmen zurückgeführt. Für den Fall, daß die Nutzenfunktion $U_{\mathcal{Y}}$ stetig differenzierbar ist, ist der Beweis im Anhang A.2 auf Seite 140 wiedergegeben[28].

[27] Es gibt also eine kardinale Nutzenfunktion $U_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R}$.

[28] Den allgemeineren Fall hat Löffler 1996 bewiesen [40].

3.2.5 Maß für Risikoaversion bei μ-σ-Präferenz

Damit lassen sich im μ-σ^2-Raum Indifferenzkurven einzeichnen. Der Investor ist also bei einer Erhöhung der Varianz der stochastischen Auszahlung seines Portfolios durch eine Erhöhung des Erwartungswertes auf die gleiche Indifferenzkurve zu bringen.

Ein naheliegendes Risikoaversionsmaß ist nun, wieviel höheren Erwartungswert der Investor fordert zur Kompensation der höheren Varianz, also gerade die Steigung der Indifferenzkurve im μ-σ^2-Raum: Je höher die Steigung, desto risikoaverser der Investor, da er für eine kleine Erhöhung der Varianz eine große Erhöhung des Erwartungswertes fordert, um auf der gleichen Indifferenzkurve zu bleiben. Der Satz über Ableitungen impliziter Funktionen gibt dann folgende Darstellung[29]:

Definition ($MRS_{\mu\sigma^2}$). An der Stelle $(\mu, \sigma^2) = (\mathbf{n}'\boldsymbol{\mu}_x, \mathbf{n}'\mathbf{V}_x\mathbf{n})$ ist die marginale Rate der Substitution von Erwartungswert und Varianz des Investors i mit Nutzenfunktion $U^i_{\mu\sigma}$:

$$MRS^i_{\mu\sigma^2}(\mu, \sigma^2) := \left.\frac{d\mu}{d\sigma^2}\right|_{U^i_{\mu\sigma}(\mu,\sigma^2)=const} = \frac{-\frac{\partial U^i_{\mu\sigma}(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}}{\frac{\partial U^i_{\mu\sigma}(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}} \tag{3.10}$$

Ganz entsprechend kann man die marginale Rate der Substitution von Erwartungswert und Standardabweichung definieren, die Steigung der Indifferenzkurve im μ-σ-Raum.

Quasikonkavität

Daß $U_{\mu\sigma}$ nur streng monoton steigend im Erwartungswert und streng monoton fallend in der Varianz ist, sichert noch lange nicht die Existens oder die Eindeutigkeit eines Equilibriums.

Ein Schritt in diese Richtung ist, daß die Indifferenzkurven im μ-σ-Raum auch konvex seien, also die marginale Rate der Substitution von Erwartungswert und Standardabweichung mit zunehmender Standardabweichung wächst.

Hier soll sogar eine noch stärkere Forderung gestellt werden, daß nämlich die Nutzenfunktion streng quasikonkav ist.[30] Es ist die schwächste Annahme, die garantiert, daß für beliebige Preise und Anfangsvermögen das optimale Portfolio eindeutig ist[31].

---

[29] Hier wird die Varianz als eine Variable betrachtet, nicht als Quadrat einer anderen, also bedeutet $d\sigma^2$ nicht $[d\sigma]^2$, sondern $d[\sigma^2]$.

[30] Das Konzept geht schon zurück auf Sharpe 1964 [62]

[31] für einen einzelnen Investor. Die Annahme reicht nicht aus, um Eindeutigkeit des Gesamtgleichgewichtes zu garantieren, siehe [8]

Definition (Strenge Quasikonkavität). Die Nutzenfunktion $U_{\mu\sigma}$ ist streng quasikonkav, wenn

$$U_{\mu\sigma}(\mu',\sigma') > U_{\mu\sigma}(\mu,\sigma) \tag{3.11}$$
$$\Rightarrow \quad \forall\lambda \in (0,1) : U_{\mu\sigma}\big(\lambda(\mu,\sigma) + (1-\lambda)(\mu',\sigma')\big) > U_{\mu\sigma}(\mu,\sigma). \tag{3.12}$$

Das impliziert nicht nur die Konvexität der im μ-σ-Raum induzierten Indifferenzkurven, sondern auch, daß die Indifferenzkurven für große Werte der Standardabweichung alle die gleiche asymptotische Steigung haben.

Weiterhin gilt, daß quasikonkave Funktionen fast überall differenzierbar sind, von daher ist es keine zu große Einschränkung, wenn man im folgenden Differenzierbarkeit verlangt, um einfacher rechnen zu können.

Damit sei die Fundierung der μ-σ-Präferenz abgeschlossen. Es ist also gezeigt, daß, wenn der Investor strenge Monotonie im risikolosen Asset aufweist und varianzavers ist (also jedes Störportfolio ablehnt, das Erwartungswert Null hat und nicht korreliert ist mit seinem jetzigen Portfolio), sich eine Nutzenfunktion finden läßt, die nur auf Erwartungswert und Varianz der Portfolios beruht und seine 0Präferenzen widerspiegelt.

Weil das Erwartungsnutzenparadigma aber als das fundiertere gilt, sei es hier kurz betrachtet und seine Konsistenz mit μ-σ-Präferenz untersucht.

3.3 Das Erwartungsnutzenparadigma

Hier wird eine Erwartungsnutzenrepräsentation der Präferenzrelation des Investors über unsichere Alternativen bei einem Gut vorausgesetzt. Es wird also angenommen, daß der Investor Präferenzen hat über eindimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen, und seine Präferenzrelation die Annahmen 3.1.6 bis 3.1.12 erfüllt[32], da man dann eine von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion finden kann, die die sicheren Alternativen so bewertet, daß ihr Erwartungswert präferenzerhaltend ist.

Wie für μ-σ-Präferenzen werden zunächst die Formalisierung von Habgier und Risikoablehnung untersucht. Es werden im Erwartungsnutzenparadigma etwas andere Verhaltensannahmen getroffen, die wiederum zu einer bestimmten Form der Nutzenfunktion führen.

3.3.1 Habgier

Ein Investor wird schwach habgierig genannt, wenn er nicht ablehnt, daß seine ursprüngliche Auszahlung $\tilde{x}_0$ um eine nichtnegative zufällige Auszahlung $\tilde{\varepsilon}$ erhöht wird:

[32] Reflexivität, Vollständigkeit, Transitivität, Ordnungserhalt, Mittelwert, Starke Unabhängigkeit, Stetigkeit

Definition (Habgier). Ein Investor i ist schwach habgierig, wenn[33]

$$\begin{aligned} & \tilde{x} \overset{d}{\sim} \tilde{x}_0 + \tilde{\varepsilon} \quad \text{mit } \tilde{\varepsilon} \geq 0 \\ \Rightarrow \quad & \tilde{x} \succeq^i \tilde{x}_0. \end{aligned}$$

Man kann diese schwache Habgier mit der von-Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion des Investors in Verbindung setzen, es gilt der Satz[34]:

Satz 8 (Stochastische Dominanz erster Ordnung). *Es sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

1. $\tilde{x} \overset{d}{\sim} \tilde{x}_0 + \tilde{\varepsilon} \quad \textit{mit } \tilde{\varepsilon} \geq 0$
2. *Für alle* monoton steigenden *von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktionen U_E (mit $U'_E \geq 0$) gilt:*
$$E[U_E(\tilde{x})] \geq E[U_E(\tilde{x}_0)] \tag{3.13}$$
3. *Für die Verteilungsfunktionen F_x, F_{x0} gilt*[35]*:*
$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad F_x(x) \leq F_{x0}(x). \tag{3.14}$$

Das bedeutet, daß ein Investor, der eine schwach monoton steigende von-Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion hat, schwach habgierig ist, und eine Addition eines Assets mit beschränkter Haftung zu seiner stochastischen Auszahlung nicht ablehnt.[36]

3.3.2 Risikoaversion

Weiterhin wird angenommen, daß der Investor strikt *risiko*avers ist. Er lehnt *bestimmte* Störterme ab, nämlich faire Spiele, die nur die Varianz seiner Auszahlung erhöhen, ohne den Erwartungswert zu ändern. Sei zunächst genau definiert, was unter einem fairen Spiel (relativ zu einer ursprünglichen unsicheren Auszahlung $\tilde{x}_0$) verstanden wird[37]: Es ist die Überlagerung der ursprünglichen Auszahlung $\tilde{x}_0$ des Investors mit einer Auszahlung, deren bedingter Erwartungswert, gegeben die ursprüngliche Auszahlung, Null ist.

[33] Das Symbol $\overset{d}{\sim}$ bedeutet, daß die Zufallsvariablen gleich verteilt sind, also die Verteilungsfunktion gleich ist. Sie müssen nicht in jedem Zustand das gleiche auszahlen.

[34] Beweis z. B. in Huang/Litzenberger [23].

[35] Diese Bedingung besagt, daß für jede bestimmte Höhe einer Auszahlung x die Wahrscheinlichkeit, daß die neue Zufallsvariable $\tilde{x}$ darüber liegt, höher ist als die Wahrscheinlichkeit, daß die ursprüngliche stochastische Auszahlung $\tilde{x}_0$ darüber liegt. Sie wird nicht weiter benutzt.

[36] Man beachte, daß bei der μ-σ-Präferenz nur gefordert wurde, daß er die Addition des risikolosen Assets nicht ablehnt. Ein Investor, der (stark) habgierig ist (wie in diesem Abschnitt definiert), zeigt also sicher auch strenge Monotonie im risikolosen Asset (wie im vorigen Abschnitt 3.2.2), aber nicht unbedingt umgekehrt.

[37] Siehe Fußnote 26

Definition (Faires Spiel). $\tilde{\varepsilon}$ ist ein faires Spiel relativ zur Zufallsvariablen $\tilde{x}_0$, wenn

$$Var[\tilde{\varepsilon}] \neq \mathbf{0} \quad \wedge \quad E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{x}_0] = 0 \tag{3.15}$$

Der Investor ist schwach risikoavers, wenn er jede Addition eines fairen Spiels zu seiner ursprünglichen stochastischen Auszahlung $\tilde{x}_0$ ablehnt (oder indifferent ist):

Definition (Risikoaversion). Ein Investor i wird schwach risikoavers genannt, wenn

$$\tilde{x} \overset{d}{\sim} \tilde{x}_0 + \tilde{\varepsilon} \quad \text{mit } E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{x}_0] = 0 \tag{3.16}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{x} \preceq^i \tilde{x}_0. \tag{3.17}$$

Man beachte, daß $E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{x}_0] = 0$ impliziert, daß sowohl $E[\tilde{\varepsilon}] = 0$ als auch $cov[\tilde{\varepsilon}, \tilde{x}_0] = 0$.[38]

Man kann diese schwache Risikoaversion mit der von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion des Investors in Verbindung setzen, es gilt der Satz[39]:

Satz 9 (Stochastische Dominanz zweiter Ordnung). *Es sind die drei folgenden Aussagen äquivalent*[40]*:*

1. $\tilde{x} \overset{d}{\sim} \tilde{x}_0 + \tilde{\varepsilon}$ *mit* $E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{x}_0] = 0$
2. *Für alle* konkaven *von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktionen* U_E *(mit* $U_E'' \leq 0$*) gilt:*
$$E[U_E(\tilde{x})] \leq E[U_E(\tilde{x}_0)] \tag{3.18}$$
3. *Es gilt*[41] $E[\tilde{x}] = E[\tilde{x}_0]$ *und für die Verteilungsfunktionen* F_x, F_{x0} *gilt*[42]
$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad \int_{z=-\infty}^{x} F_x(z)\, dz \geq \int_{z=-\infty}^{x} F_{x0}(z)\, dz. \tag{3.19}$$

Das bedeutet, daß ein Investor, der eine schwach konkave von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion hat, schwach risikoavers ist, und eine Addition eines fairen Spiels zu seiner stochastischen Auszahlung schwach ablehnt.

---

[38] Bei der μ-σ-Präferenz wurde nicht nur gefordert, daß der Investor faire Spiele ablehnt (Risikoaversion), sondern daß er *alle* Additionen mit Erwartungswert und Kovarianz zum ursprünglichen Portfolio von Null ablehnt (Varianzaversion). Jeder Investor, der varianzavers ist, ist auch risikoavers, aber nicht umgekehrt.

[39] Für den Beweis siehe Rothschild/Stiglitz [58] und Huang/Litzenberger [23].

[40] Dies ist die Definition nach Huang/Litzenberger [23, Kapitel 2]. Ingersoll [29, Seite 123] nennt das hier definierte Konzept „Increasing Risk", und was er als stochastische Dominanz zweiter Ordnung bezeichnet, heißt bei Huang/Litzenberger „second degree stochastic monotonic dominance".

[41] Beachte, daß nicht gefordert wurde, daß die Nutzenfunktion monoton steigend ist. Wenn also eine stochastische Auszahlung von *jedem* Investor mit konkaver Nutzenfunktion einer anderen vorgezogen wird (auch von Investoren mit *fallender* Nutzenfunktion), dann müssen die beiden Auszahlungen gleichen Erwartungwert haben.

[42] Diese Beziehung wird nicht weiter benutzt und ist nur der Vollständigkeit aufgeführt.

3.3.3 Maß für Risikoaversion im Erwartungsnutzenparadigma

Nachdem nun auch im Rahmen des Erwartungsnutzenparadigmas Risikoaversion formalisiert ist, wird nun ein Maß dafür angegeben, wie risikoavers ein Investor an einem bestimmten Punkt ist.

Da von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktionen bis auf affine (positive) Transformationen eindeutig sind, sind die folgenden Definitionen der Arrow-Prattschen Risikomaße eindeutig:

Definition (Absolute Risikoaversion).

$$ARA(x) = \frac{-U_E''(x)}{U_E'(x)} \tag{3.20}$$

Definition (Relative Risikoaversion).

$$RRA(x) = \frac{-x \cdot U_E''(x)}{U_E'(x)} \tag{3.21}$$

Diese Risikoversion ist eindeutig, gegeben eine Präferenzrelation, und umgekehrt, d. h. die Angabe der Risikoaversion für alle x spezifiziert die Ordnung der unsicheren Alternativen komplett.

Die zweite Ableitung einer Funktion informiert ja über die Krümmung der Funktion, und durch die Division durch die erste Ableitung wird das Risikomaß normiert, so daß es invariant bezüglich der genannten affinen Transformation der Nutzenfunktion ist.

Eine anschauliche Interpretation ist die folgende[43]: Ein Investor, der sein Vermögen in genau ein risikoloses und ein riskantes Asset[44] investiert, wird eine bestimmte Aufteilung wählen. Steigt sein Vermögen, wird ein Investor mit konstanter ARA den gleichen absoluten Betrag in das riskante Asset investieren, einer mit steigender ARA weniger, und einer mit fallender ARA mehr. Letzteres[45] ist empirisch der Fall: Je mehr Geld man hat, desto mehr legt man riskant an.[46]

Nun zur RRA: Steigt das Vermögen eines Investors, wird einer mit konstanter RRA den gleichen relativen *Anteil* in das riskante Asset investieren, einer mit steigender RRA einen kleineren Anteil, und einer mit fallender RRA einen größeren Anteil.

---

[43] Siehe Huang/Litzenberger [23, Abschnitte 1.21 und 1.22]

[44] Diese Beschränkung auf nur zwei Assets ist nicht so einschränkend, wie sie aussieht: Die Zwei-Fonds-Separation im CAPM mit risikolosem Asset (siehe Abschnitt 5.4 auf Seite 93) bedeutet ja, daß der Investor eine Kombination nur zwischen risikolosem und riskantem (Tangential)Portfolio wählt!

[45] „decreasing absolut risk aversion“ oder kurz „DARA“ genannt.

[46] Die quadratische Nutzenfunktion verstößt dagegen.

3.4 Kompatibilität von μ-σ-Präferenz und Erwartungsnutzen

3.4.1 Historischer Überblick

In vielen einführenden Texten zum CAPM wird langwierig in Bernoullis [3] Konzept des Erwartungsnutzen eingeführt (von 1738!) und die von-Neumann-Morgenstern Funktionen behandelt (mit $U = E[U_E(\tilde{W})]$). Dann wird bei der Behandlung der Portfolioselektion und des CAPM recht unvermittelt eine völlig andere Nutzenfunktion eingeführt, nämlich $U = U_{\mu\sigma}(\mu_W, \sigma_W^2)$. Im ersteren Fall maximiert der Investor den erwarteten Nutzen, also den Erwartungwert einer Funktion (nämlich der Nutzenfunktion) einer Zufallsvariablen, im zweiten Fall maximiert der Investor eine Funktion, die in bestimmter Weise nur von Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen abhängt, was hier als μ-σ-Präferenz bezeichnet wird. Was ein Investor von Portfolios wissen muß, um sie zu vergleichen, ist also im Fall des Erwartungsnutzen die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Rendite, im Fall der μ-σ-Präferenz nur je zwei Zahlen, nämlich Erwartungswert und Varianz.

Markowitz [44] führte 1952 letzteres Konzept ein, daß also Investoren ihr optimales Portfolio nur nach dessen Erwartungswert und Varianz wählen[47]. Den raison-d'-être des μ-σ-Kriteriums muß man nicht lange suchen: Es ist viel einfacher zu handhaben, und liefert schöne Ergebnisse, insbesondere das CAPM.

Das μ-σ-Kriterium wurde aber auch heftig kritisiert, da es zu sehr vereinfache, z. B. berücksichtigt es die Schiefe der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Auszahlung nicht, was ja eminent unrealistisch ist. Deshalb wurden Versuche unternommen, das CAPM auf schwächeren Annahmen zu gründen. Erstens wurde untersucht, wann es auf den Erwartungsnutzen zurückzuführen ist, dazu unten mehr. Zweitens wurde versucht, das CAPM anhand alternativer Verhaltensannahmen abzuleiten, z. B. der Varianzaversion (Duffie, [15]), wobei später gezeigt wurde, daß diese Annahme äquivalent zum μ-σ-Kriterium ist (Löffler, [40]).

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, unter welchen Umständen die beiden Konzepte — Erwartungsnutzen und μ-σ-Präferenz — kompatibel sind. Interessanterweise ist die Lösung dieses Problems noch gar nicht so alt; obwohl es schon seit über 40 Jahren in der Luft schwebt, sind noch vor wenigen Jahren neue Beiträge dazu erschienen ([49], [40], [2]).

Um Bedingungen zu finden, wann beide Konzepte das gleiche Ergebnis liefern, kann man grundsätzlich drei Herangehensweisen beschreiten:

Man beschreibt

[47] Tatsächlich hat nach [12] Marschak schon 1938 die Entscheidung des Investors durch Indifferenzkurven im μ-σ^2-Raum modelliert.

1. Beschränkungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen
2. Beschränkungen der von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktionen der Investoren, oder
3. Gemeinsame Beschränkungen auf beides, Verteilung und Nutzenfunktion.

Diese drei Möglichkeiten werden nun kurz besprochen und dann nach einer Analyse des Erwartungsnutzens ausführlicher erläutert.

Beschränkungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Im ersten Fall liefern unter anderem normalverteilte Zufallsvariablen das gewünschte Resultat, und Tobin hatte 1958 vermutet ([63]), daß jede *zweiparametrige* Wahrscheinlichkeitsverteilung der Assetrenditen zu Präferenzen führt, die sich als Funktion nur von Erwartungswert und Varianz ausdrücken lassen. Ein Jahrzehnt später lag das erste Gegenbeispiel vor: 1969 zeigte Feldstein [22], daß Tobins Vermutung für lognormal verteilte Zufallsvariablen, die sich ja durchaus durch genau zwei Parameter beschreiben lassen, nicht gilt.

Chamberlain [11] wies 1983 nach, daß es genau die Klasse der elliptisch verteilten Zufallsvariablen ist, die für beliebige von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion der Investoren erlaubt, den Erwartungsnutzen als Funktion von Erwartungswert und Varianz auszudrücken.[48]

Eine verwandte Literatur beschäftigt sich mit der Frage der Zwei-Fond-Separation, aus der sich das CAPM auch herleiten läßt. Ross beschrieb 1978 die genauen hinreichenden und notwendigen Bedingungen an die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung, die Zwei-Fond-Separation unter dem Erwartungsnutzenparadigma ermöglichte.[49]

Beschränkungen der Nutzenfunktionen

Im zweiten Fall, ohne Beschränkung der Verteilung der Zufallsvariablen, kann μ-σ-Präferenz der Investoren nur dann vom Kriterium der Erwartungsnutzenmaximierung abgeleitet werden, wenn die von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion der Investoren quadratisch ist, wie Markowitz schon 1952 erkannte [44].

[48] Epstein [18] zeigte 1985 einen weiteren Weg, von Erwartungsnutzenmaximierung zu μ-σ-Präferenz zu kommen, nämlich mit Postulaten über fallende absolute Risikoaversion.

[49] Es sind zwei verschiedene Fragen, ob

- sich der erwartete Nutzen einer Zufallsvariablen als Funktion von Erwartungswert und Varianz ausdrücken läßt, es also $U_{\mu\sigma}$ gibt mit $E[U_E(\tilde{W})] = U_{\mu\sigma}(\mu_W, \sigma_W^2)$, oder
- alle Investoren optimale Portfolios wählen, die μ-σ-effizient sind.

Gemeinsame Beschränkungen

Erst Berk klärte 1997 den dritten Fall der gemeinsamen Beschränkungen (Verteilung der Renditen und Nutzenfunktion der Investoren) auf und zeigte nicht nur hinreichende, sondern die notwendigen Bedingungen auf, unter denen das CAPM unter dem Erwartungsnutzenparadigma gilt.

3.4.2 Analyse des Erwartungsnutzens

Nun sei das ganze etwas formaler angegangen. Unter dem Erwartungsnutzenparadigma wird ja angenommen, daß es eine von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion gibt, so daß der Nutzen einer unsicheren Alternative gerade dem Erwartungswert des von-Neumann-Morgenstern Nutzens entspricht[50]. Betrachtet sei der Ausdruck für den Erwartungsnutzen und seine Taylorreihenentwicklung. Zunächst sei der von-Neumann-Morgenstern Nutzen einer Zufallsvariablen $\tilde{W}$ um ihren Erwartungswert $\mu_W = E[\tilde{W}]$ in eine Taylorreihe expandiert:

$$U_E(\tilde{W}) = U_E(\mu_W) \tag{3.22}$$
$$+ U_E'(\mu_W) \cdot (\tilde{W} - \mu_W) \tag{3.23}$$
$$+ \frac{1}{2} U_E''(\mu_W) \cdot (\tilde{W} - \mu_W)^2 \tag{3.24}$$
$$+ R_3(\tilde{W}) \tag{3.25}$$

mit dem Restterm

$$R_3(\tilde{W}) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} U_E^{(n)}(\mu_W) \cdot (\tilde{W} - \mu_W)^n \tag{3.26}$$

Wenn diese Taylorreihe konvergiert und Erwartungswertbildung und Summation vertauscht werden können, dann kann man den Erwartungsnutzen $E[U_E(\tilde{W})]$ so schreiben:

$$\begin{aligned} E[U_E(\tilde{W})] = {} & U_E(\mu_W) \\ & + U_E'(\mu_W) \cdot E[(\tilde{W} - \mu_W)] \\ & + \frac{1}{2} U_E''(\mu_W) \cdot E\left[(\tilde{W} - \mu_W)^2\right] \\ & + E[R_3(\tilde{W})] \end{aligned}$$

also kurz

$$E[U_E(\tilde{W})] = U_E(\mu_W) + \frac{1}{2} U_E''(\mu_W) \cdot \sigma_W^2 + E[R_3(\tilde{W})] \tag{3.27}$$

[50] Vergleiche Satz 6 auf Seite 34.

mit dem Restterm

$$E[R_3(\tilde{W})] = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} U_E^{(n)}(\mu_W) \cdot E\big[(\tilde{W} - \mu_W)^n\big] \tag{3.28}$$

Der Term nach dem Multiplikationspunkt in Gleichung (3.28) ist das $n$te Zentralmoment (siehe Glossar, Seite 146) der Zufallsvariablen $\tilde{W}$.

Die ersten beiden Summanden in Gleichung (3.27) sind abhängig von Erwartungswert und Varianz, nicht von weiteren Momenten. Damit der Erwartungsnutzen sich schreiben läßt als Funktion nur von Erwartungswert und Varianz eines Portfolios, muß sich der Restterm R_3 als Funktion von Erwartungswert und Varianz ausdrücken lassen (oder, als trivialer Fall dessen, identisch verschwinden).[51] Seien also nun die Beschränkungen auf Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Nutzenfunktion untersucht, die das ermöglichen.

3.4.3 Beschränkungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Beschreitet man den ersten Weg, erlaubt man also beliebige Nutzenfunktionen, so muß man der Distribution Beschränkungen auferlegen. Ein hinreichendes Beispiel für die Konsistenz der beiden Ansätze sind multivariat normalverteilte Zufallsvariablen[52]. Bei ihnen lassen sich das dritte und höhere Momente als Funktion der ersten beiden ausdrücken, und damit ist der oben genannte Restterm und damit der gesamte Erwartungsnutzen stets als Funktion von Erwartungswert und Varianz schreibbar.[53]

Das geht nicht bei lognormalverteilten Assets, die damit ein Gegenbeispiel zu Tobins Vermutung darstellen, daß jede zweiparametrige Verteilung der Assetrenditen zu μ-σ-Präferenz führt. Der entscheidende Punkt ist die Stabilität unter Addition: Die (beliebig gewichtete) Summe zweier normalverteilter Zufallsvariablen (ob korreliert oder nicht) ist wieder normalverteilt. Für lognormalverteilte Zufallsvariable gilt das aber nicht, d. h. die Rendite eines Portfolio aus Assets mit lognormalverteilter Rendite ist nicht notwendig lognormalverteilt.

Die Annahme der Normalverteilung ist aber kritisiert worden, da damit die Wahrscheinlichkeit negativer Assetpreise größer Null ist, es also keine

[51] Es läst sich allgemein zeigen, daß ein Investor mit einer beliebigen stetigen von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion unsichere Alternativen genau dann nach ihren ersten n Momenten beurteilt und ordnet, wenn diese Nutzenfunktion ein Polynom mit einem Grad $\leq n$ ist.

[52] Finanzielle Assets (also Assets mit einem Nettoangebot von Null), deren Auszahlung nichtlinear von einem Basisasset abhängt (z. B. Optionen), stellen hier ein Problem dar, da ihre Auszahlung offenbar nicht normalverteilt ist. Diese Assets können existieren, ohne ein CAPM-Gleichgewicht zu zerstören, wenn der Anteil der Rendite, der nicht von einer minimalen Faktorstruktur der Wirtschaft aufgespannt wird, ein faires Spiel relativ zur Marktrendite ist, siehe Berk [2], oder ausführlicher Ingersoll [29, Kapitel 9]

[53] Umgekehrt gilt das nicht: Auch bei normalverteilten Zufallsvariablen läßt sich nicht jede Funktion von Erwartungswert und Varianz als Erwartungsnutzen auszudrücken.

Assets mit beschränkter Haftung geben kann. Das ist offenbar inkonsistent mit der Empirie.

Nun ist aber die Normalverteilung nur eine hinreichende Bedingung an die Assets, um zu μ-σ-Präferenz zu gelangen. Chamberlain wies 1983 auf eine allgemeinere Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen hin: Elliptisch verteilte Zufallsvariablen.[54]

Elliptische Verteilung

Hinreichend und notwendig[55] dafür, daß der Erwartungsnutzen sich für beliebige von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktionen als Funktion von Erwartungswert und Varianz ausdrücken läßt, sind elliptische[56] Verteilungen[57]. Die gesamte Verteilung jedes Portfolios ist dann nämlich eindeutig durch Erwartungswert und Varianz des Portfolios bestimmt (gegeben die gemeinsame elliptische Verteilung der einzelnen Assets). Wenn es kein risikoloses Asset gibt, dann kann das erste Asset beliebig verteilt sein, und die anderen Assets müssen elliptisch verteilt sein, gegeben das erste. Diese Verteilungen führen dann immer zu Zwei-Fonds-Separation (ohne Beschränkungen auf die von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion)[58].

Ein Zufallsvektor $\tilde{\mathbf{x}}$ mit J Elementen ist elliptisch verteilt, wenn seine Dichtefunktion geschrieben werden kann als

$$f(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \cdot g_J\Big((\tilde{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})'\Omega^{-1}(\tilde{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})\Big). \tag{3.29}$$

Hierbei ist Ω eine positiv definite Dispersionsmatrix und $\boldsymbol{\mu}$ hier der Vektor der *Mediane*. g_J ist eine eindimensionale Familie von Dichtefunktionen (mit Parameter J, der Dimension des Zufallvektors). Wenn die Varianzen existieren, ist die Kovarianzmatrix proportional zu Ω. Wenn die Mittelwerte existieren, ist $\boldsymbol{\mu}$ auch der Vektor der Mittelwerte.

In die Klasse der elliptisch verteilten Zufallsvariablen gehört nicht nur die multivariate Normalverteilung, sondern auch die multivariate Student-t-Verteilung, die multivariate Cauchy-Verteilung[59], und andere. In der Tat kann jede entsprechend normalisierte nichtnegative Funktion als Basis für

[54] Eine andere hinreichende Bedingung ist, daß es nur zwei verschiedene Assets mit unterschiedlichem Erwartungswert gibt (dann ist jedes Portfolio durch den Erwartungswert eindeutig gekennzeichnet).

[55] Beweis siehe Chamberlain [11], für „hinreichend“ auch Ingersoll, der die elliptische Verteilung ausführlich beschreibt [29, Anhang B zu Kapitel 4].

[56] So genannt, weil die Höhenlinien der Dichtefunktion elliptisch sind.

[57] Wenn es kein risikoloses Asset gibt, muß man die Klasse der Verteilungen noch etwas erweitern.

[58] Allerdings impliziert laut Chamberlain selbst eine monoton steigende, konkave von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion nicht, daß $f(\mu_y, \sigma_y^2) = E[U_E(\mathbf{y}'\tilde{r})] = f(\mathbf{y}'\boldsymbol{\mu}_r, \mathbf{y}'\mathbf{V}_r\mathbf{y})$ im ersten Parameter monoton steigend ist, dies muß man also entweder zeigen oder annehmen.

[59] für die weder Varianzen noch Mittelwerte definiert sind.

eine elliptische Verteilung benutzt werden, und die entsprechende Verteilung kann sehr „unnormal“ sein. Wenn insbesondere g für größe Werte Null ist, dann kann die Verteilung der Assets von oben und unten beschränkt sein — so daß der oben erwähnte Einwand gegen normalverteile Assets im allgemeinen Fall nicht gilt.

3.4.4 Beschränkungen der Nutzenfunktionen

Sei nun der zweite Weg beschritten, daß der von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion der Investoren Beschränkungen auferlegt werden. Dann ist für beliebige Distribution der Renditen eine quadratische Nutzenfunktion hinreichend und notwendig für Konsistenz von Erwartungsnutzen und μ-σ-Präferenz[60].

Sei nämlich mit $a > 0$ [61]

$$\begin{aligned} U_E(\tilde{W}) &= -a\tilde{W}^2 + \tilde{W} \\ U_E'(\tilde{W}) &= -2a\tilde{W} + 1 \\ U_E''(\tilde{W}) &= -2a && < 0 \\ U_E^{(n)}(\tilde{W}) &= 0 && \text{für } n \geq 3 \end{aligned}$$

damit ist der Erwartungsnutzen für quadratische Nutzenfunktion einfach nach Einsetzen von (3.30) in (3.27):

$$\begin{aligned} E[U_E(\tilde{W})] &= -a\mu_W^2 + \mu_W + \frac{1}{2} \cdot (-2a) \cdot \sigma_W^2 && (3.30) \\ &= -a(\mu_W^2 + \sigma_W^2) + \mu_W && (3.31) \\ &= -a\left[\left(\mu_w - \frac{1}{2a}\right)^2 + (\sigma_w)^2 - \frac{1}{4a^2}\right] && (3.32) \end{aligned}$$

also nur abhängig von den ersten beiden Momenten der Renditenverteilung, da die höheren Ableitungen verschwinden.

Die Indifferenzkurven im μ-σ-Raum sind, wie aus der letzten Gleichung hervorgeht, im Falle quadratischer Nutzenfunktionen konzentrische Halbkreise, deren Mittelpunkt auf der senkrechten Achse liegt ($\mu_w = \frac{1}{2a}, \sigma_w = 0$).

Quadratische Nutzenfunktionen sind jedoch ökonomisch nicht sehr plausibel[62], weil sie Sättigung der Investoren implizieren, ja sogar negativen

[60] Quadratische Nutzenfunktionen braucht man insbesondere dann schon, um den Erwartungsnutzen als Funktion von μ und σ zu schreiben, wenn der Zustandsraum endlichdimensional ist, d. h. es nur endlich viele Zustände gibt (Normalverteilte Zufallsvariablen sind damit offenbar ausgeschlossen).

[61] Da von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktionen invariant sind gegenüber positiv affinen Transformationen, kann man eine konkave quadratische Nutzenfunktion immer wie hier schreiben.

[62] Es gilt aber, daß das CAPM nur gelten kann, wenn die Nutzenfunktion aller Investoren

Grenznutzen, wenn man über den Scheitelpunkt der Parabel gelangt ist. Selbst wenn man definiert, daß man im monoton steigenden Bereich der Parabel bleibt ($\tilde{W} < \frac{1}{2a}$), zeigen quadratische Nutzenfunktionen monoton steigende absolute Risikoaversion[63], was absolut nicht mit der Empirie vereinbar ist.[64]

3.4.5 Gemeinsame Beschränkungen

Die Entwicklung gemeinsamer Beschränkungen erfordert die Beschreibung einer minimalen Faktorstruktur der Assetrenditen, was über den Rahmen dieser Arbeit hinausgeht. Intuitiv soviel:

Wie oben gezeigt, gilt, wenn die von-Neumann-Morgenstern Funktion eines Investors ein Polynom vom Grade n ist, daß der Investor die Momente der Verteilung über dem $n$ten Moment ignoriert. Die ersten beiden Momente werden durch eine Nutzenfunktion, die nur von Erwartungswert und Varianz abhängt, erfaßt, also müssen dem dritten bis zum $n$ten Moment Beschränkungen auferlegt werden. Es müssen insgesamt den Koeffizienten der Taylorreihenentwicklung der Nutzenfunktion der Investoren und den zentralen Momenten der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Faktoren (einer minimalen Faktorstruktur der Assets) Beschränkungen auferlegt werden. Quadratische Nutzenfunktionen oder elliptisch verteilte Assetrenditen sind die extremen Strategien, nur ersteres oder letzteres zu tun. Beschränkungen, die in der Mittel liegen, also Nutzenfunktionen mit Polynomen höheren Grades involvieren, bespricht Berk [2]. Leider sind sie auch nicht realistischer als die vorher bekannten, da kein Polynom endlichen Grades sowohl streng monoton steigend als auch streng konkav ist entlang der positiven Halbgeraden.

Wenn man Polynome unendlichen Grades, also analytische Funktionen, einbezieht, dann gelangt man wieder zu Ross Bedingungen auf Assetsrenditen, die zu Zwei-Fond-Separation (unter dem Erwartungsnutzenparadigma) führen.

3.5 Empirische Probleme

3.5.1 Probleme mit μ-σ-Präferenz

Die Annahme, daß Investoren ihre Portfolioentscheidung nur aufgrund von Erwartungswert und Varianz des erwarteten Endvermögens treffen, ist

---

sich von einer quadratischen nur unterscheidet um einen Term, dessen Ableitung orthogonal zu jedem Faktor (einer minimalen Faktorstruktur der stochastichen Assetrenditen) ist, siehe [2].

[63] $ARA(W) = \frac{a}{1/2-aW}$ und $ARA'(W) = \left(\frac{a}{1/2-aW}\right)^2 > 0$

[64] Siehe die Interpretation der absoluten Risikoaversion in Unterabschnitt 3.3.3 auf Seite 42.

als Übervereinfachung schon immer stark kritisiert worden. Schon Sharpe schrieb 1964, daß der μ-σ-Ansatz unter bestimmten Umständen zu „unsatisfactory predictions of behavior“ führen kann [62]. Einige dieser Probleme werden nun beschrieben.

Indifferenz zwischen links- und rechtsschiefen Verteilungen

Eine eindimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung ist ja nicht vollständig charakterisiert durch Mittelwert und Varianz. Verteilungen, die in diesen beiden Maßen übereinstimmen, können z. B. in unterschiedliche Richtung schief sein, so daß etwa die eine beschränkt ist von unten, aber einen langen Schweif positiver Wahrscheinlichkeiten entlang höherer Werte hat, während die andere spiegelsymmetrisch dazu ist.

Die meisten realen Investoren würden offenbar erstere Verteilung vorziehen, aber ein Investor mit μ-σ-Präferenz wäre indifferent zwischen ihnen, er ignoriert alle Aspekte der Verteilung, die über die ersten beiden Momente hinausgeht, insbesondere z. B. die Schiefe.

Sättigung möglich

Ein weiteres Problem mit μ-σ-Präferenz ist, daß Sättigung möglich ist. Nicht nur bedeutet daß, daß ein Investor es ablehnen kann, ein Asset mit beschränkter Haftung geschenkt zu bekommen, weil ihm die dadurch gestiegene Varianz „zu viel“ ist, es bedeutet auch, daß im Gleichgewichtsmodell ohne risikoloses Asset Sättigung möglich ist, ohne daß der Investor sein Budget ausschöpft.

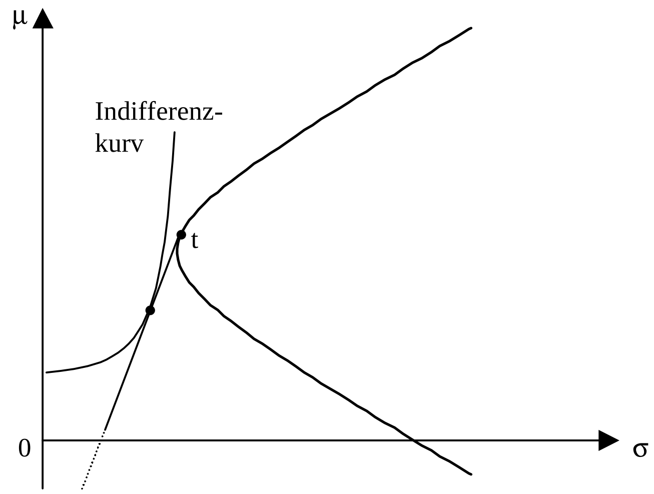

Abbildung 3.1: **Sättigung.** *Extrem risikoaverse Investoren werfen einen Teil ihres Vermögens weg.*

Er zöge es also vor, Teile seines Vermögens in das risikolose Asset mit Rendite von -100% anzulegen, es also wegzuwerfen — selbst wenn es Assets mit beschränkter Haftung gäbe. Man betrachte dazu Bild 3.1, in dem die schräge Linie von -1 auf der vertikalen Achse ausgehen soll, also von dem „risikolosen Asset“, das darin besteht, das gesamte Vermögen wegzuwerfen. Der extrem risikoaverse Investor mit der eingezeichneten Indifferenzkurve wählt sein optimales Portfolio also als Kombination zwischen dem Tangentialportfolio t und dem Wegwerfen, legt also einen Teil in t an und wirft den Rest weg.

Wiederum eine recht implausible Annahme.[65]

Nichtsteigende relative Risikoaversion

Empirische Untersuchungen und Experimente zeigen, daß die Annahme konstanter relativer Risikoaversion recht plausibel ist (siehe 3.3.3).

Es läßt sich aber zeigen [39], daß die Annahme nichtsteigender relativer Risikoaversion unter μ-σ-Präferenz bei einer strikt quasikonkaven, stetig differenzierbaren Nutzenfunktion $U_{\mu\sigma}$ dazu führt, daß das optimale Portfolios immer risikolos ist, also jeder Investor, auf den diese plausible Annahme zutrifft, gleich so risikoavers ist, daß er das risikolose Asset wählt. Das bedeutet natürlich, daß das Konzept der Risikoaversion für μ-σ-Präferenzen bedeutungslos wird.

3.5.2 Probleme mit Erwartungsnutzen

Hier ist im wesentlichen zu erwähnen, daß das Axiom der starken Unabhängigkeit empirisch oft verletzt ist. Ein Beispiel ist das Allais-Paradox[66]. Die Probleme sind bei weitem nicht so stark wie im Erwartungswert-Varianz-Paradigma. Insbesondere gibt es seit langem Ansätze, den Erwartungsnutzen ohne das Axiom der starken Unabhängigkeit zu begründen[67].

3.6 Zusammenfassung und Vergleich von μ-σ-Präferenz und Erwartungsnutzen

Man kann[68] sagen, daß μ-σ-Präferenz nicht ein Sonderfall der Erwartungsnutzenmaximierung ist, sondern schlicht eine Alternative dazu, wobei normalverteilte (oder elliptisch verteilte) Assets ein Spezialfall von beidem sind.

[65] Offenbar kann dieses Phänomen nicht auftreten, wenn es ein risikoloses Asset gibt (mit einer besseren Rendite als -1). Weitere Bedingungen, unter denen diese Probleme nicht auftreten, beschreibt Nielsen [49].

[66] Siehe dazu z. B. Huang/Litzenberger [23].

[67] Der Artikel „Expected Utility Analysis without the Independence Axiom“ von Machina [43] ist aus dem Jahre 1982.

[68] mit Nielsen [50]

Tabelle 3.1: Erwartungsnutzenmaximierung versus μ-σ-Präferenz

	Erwartungsnutzenparadigma	μ-σ-Paradigma
Voraussetzung	Erwartungsnutzen	ordinale Nutzenfunktion
bezüglich	Lotterien	Portfolios
Habgier	mehr von Assets m.b.H.!	mehr vom risikolosen Asset!
	Habgier $\Longrightarrow$ Monotonie im risikol. Asset	
– Präferenzen	$\tilde{x}_0 \preceq \tilde{x} \overset{d}{\sim} \tilde{x}_0 + \tilde{\varepsilon}$ mit $\tilde{\varepsilon} \geq 0$	$\tilde{x}_0 \preceq \tilde{x} \overset{d}{\sim} \tilde{x}_0 + \varepsilon$ mit $\varepsilon \geq 0$
– Nutzenfkt.	$\frac{\partial U_E}{\partial x} \geq 0$	$\frac{\partial U_{\mu\sigma}}{\partial \mu} \geq 0$
Risikoaversion	keine fairen Spiele!	keine Störportfolios!
	Risikoaversion $\Longleftarrow$ Varianzaversion	
– Präferenzen	$\tilde{x}_0 \succeq \tilde{x} \overset{d}{\sim} \tilde{x}_0 + \tilde{\varepsilon}$ mit $E[\tilde{\varepsilon}\vert\tilde{x}_0] = 0$	$\tilde{x}_0 \succeq \tilde{x} \overset{d}{\sim} \tilde{x}_0 + \tilde{\varepsilon}$ mit $E[\tilde{\varepsilon}] = cov[\tilde{\varepsilon}, \tilde{x}_0] = 0$
– Nutzenfkt.	$\frac{\partial^2 U_E}{\partial x^2} \leq 0$	$\frac{\partial U_{\mu\sigma}}{\partial \sigma} \leq 0$
Maß für Risikoaversion	Arrow-Pratt	Marginale Rate der Substitution
abhängig von	E$[\tilde{x}]$	E$[\tilde{x}]$, Var$[\tilde{x}]$
	$-\frac{\partial^2 U_E}{\partial x^2} / \frac{\partial U_E}{\partial x} \geq 0$	$-\frac{\partial U_{\mu\sigma}}{\partial \sigma} / \frac{\partial U_{\mu\sigma}}{\partial \mu} \geq 0$
Gleichgewichtsmodell	Arrow-Debreu	CAPM
Empirische Probleme	Starke Unabhängigkeit	• Indifferenz links/rechts-schief • Sättigung möglich • Nichtsteigende RRA $\Rightarrow$ nur risikolose Portfolios

Während vom μ-σ-Investor nur gefordert wird, daß er mehr des risikolosen Assets will (Monotonie im risikolosen Asset), wird beim $E[U]$-Investor gefordert, daß er mehr von Assets mit beschränkter Haftung will („Habgier“). Habgier impliziert Monotonie im risikolosen Asset, ist also eine stärkere Annahme. Bezüglich des „Mehr!“ wird also beim $E[U]$-Investor die stärkere Annahme getroffen — allerdings eine sehr realistische.

Während andererseits vom μ-σ-Investor gefordert wird, daß er Störportfolios ablehnt (Varianzaversion), wird beim $E[U]$-Investor gefordert, daß er nur faire Spiele ablehnt (Risikoaversion). Varianzaversion impliziert also Risikoaversion, ist also eine stärkere Annahme: Jeder, der alle Störportfolios ablehnt, lehnt auch alle faire Spiele ab, aber nicht unbedingt umgekehrt. Bezüglich des „Weniger Risiko!“ wird also beim μ-σ-Investor die stärkere

Annahme getroffen — eine harmlos aussehende, scheinbar realistische, allerdings in der Tat sehr starke Annahme. Sie führt zu μ-σ-Präferenz der Investoren, und damit zu den erheblichen Problemen, die oben angedeutet worden sind.

Die Probleme der μ-σ-Analyse sind so ernst, daß sie in der akademischen Welt als obsolet angesehen werden kann. Das besser fundierte Erwartungsnutzenparadigma führt nicht[69] zum CAPM, sondern zum allgemeinen Gleichgewichtsmodell von Arrow und Debreu, das wiederum empirisch kaum handzuhaben ist.

[69] Oder nur unter sehr restriktiven und unrealistischen Bedingungen, wie in Abschnitt 3.4 beschrieben.

Kapitel 4

Blacks Zero-Beta CAPM ohne risikoloses Asset

Obwohl historisch erst das CAPM mit risikolosem Asset untersucht wurde (Sharpe 1964 [62], Lintner 1965 [36], Mossin 1966 [47]), soll hier zunächst das 1972 von Black [5] entwickelte Zero-Beta-CAPM betrachtet werden.

4.1 Spezifikation und Annahmen

Jeder Investor $i, i = 1, \ldots, I$ kommt heute in die Welt mit einer Anfangsausstattung an Geld W_0^i. Ihm bieten sich J Investitionsmöglichkeiten mit exogen gegebenen stochastischen Renditen $\tilde{r}_j$. Die gemeinsame Verteilung der Assetrenditen, insbesondere der Vektor der Renditenerwartungswerte $\boldsymbol{\mu}$ und die Kovarianzmatrix $\mathbf{V}_r$ sind jedem Investor bekannt.

Die Investoren wollen ihren Nutzen maximieren, der sich schreiben läßt als Funktion nur des Erwartungswertes und der Varianz des Endvermögens $\tilde{W}$:

$$U^i(\tilde{W}^i(1)) = U^i_{\mu\sigma}(E[\tilde{W}^i(1)], Var[\tilde{W}^i(1)]). \tag{4.1}$$

4.1.1 Annahmen

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

Bezüglich der Assets:

Annahme 4.1.1 (Endlich viele Assets gegeben durch Rendite). *Es gibt J riskante Assets, die durch ihre exogen gegebene stochastische Rendite $\tilde{\mathbf{r}}$ spezifiziert sind.*

Annahme 4.1.2 (Varianz finit, Erwartungswerte nicht gleich). *Die Assetrenditen haben finite Varianz, d. h. die Kovarianzmatrix existiert. Au-*

ßerdem hat wenigstens ein Asset einen Erwartungswert ungleich dem anderer.

Die Existenz der Varianzen und Kovarianzen bedeutet grob gesprochen, daß die Wahrscheinlichkeit sehr großer Ausschläge der Renditen nicht zu groß ist.

Annahme 4.1.3 (Assets linear unabhängig). *Die Assetrenditen sind linear unabhängig*[1]*, die Kovarianzmatrix ist also regulär und positiv definit.*

Dies bedeutet ökonomisch, daß man kein risikoloses Portfolio zusammenstellen kann, jedes Portfolio $\hat{\mathbf{y}} \neq 0$ also positive Varianz hat.

Bezüglich der Investoren

Annahme 4.1.4 (μ-σ-Präferenz). *Der Nutzen jedes Investors i läßt sich ausdrücken als Funktion von Erwartungswert und Varianz der Auszahlung seines Portfolios:*

$$U_{\mu\sigma}(E[W^i(1)], Var[W^i(1)]) \tag{4.2}$$

Unter welchen Bedingungen dies der Fall ist, wurde ja ausführlich in den Abschnitten 3.2 und 3.4 besprochen.

Annahme 4.1.5 (Nutzenfunktion monoton und quasikonkav). *Die Nutzenfunktion $U_{\mu\sigma}$ ist streng monoton steigend im Erwartungswert, streng monoton fallend in der Varianz, streng quasikonkav, und, zur einfacheren Handhabung, stetig differenzierbar.*

Annahme 4.1.6 (Homogene Erwartungen). *Alle Investoren betrachten die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Renditen als gleich, insbesondere stimmen sie wenigstens in der Einschätzung von Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}_r$ und Kovarianzmatrix $\mathbf{V}_r$ überein.*

Diese Annahme ist natürlich sehr unrealistisch, auch wenn manche Autoren sie mit Hinweis auf professionelle Portfoliomanager zu begründen versuchen.[2]

Bezüglich des Markts

Annahme 4.1.7 (Investoren als Preisnehmer). *Investoren sind Preisnehmer, können also einzeln durch ihr Handeln die Renditen nicht beeinflussen.*

[1] In dem oben besprochenen Sinne, Seite 17.

[2] Vergleiche Fußnote 2. Für eine Aufhebung dieser Annahme siehe Lintner [38], Gonedes [24], oder Rabinovitch und Owen [52].

Annahme 4.1.8 (Vollkommener Markt). *Die Menge der gehandelten Portfolios ist $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^J$. Das Preisfuntional ist linear. Der Markt sei reibungslos, beschränkungsfrei, arbitragefrei.*

Die erste Aussage impliziert, daß alle Portfolios ohne Beschränkungen gehandelt werden (ohne Leerverkaufsbeschränkungen z. B.), und die Assets perfekt teilbar sind. Die zweite Aussage impliziert, daß die Rendite eines Portfolios gleich dem gewichteten Mittel der Renditen der Assets ist. Weiterhin gibt es keine Transaktionskosten oder Steuern, und keine sicheren Arbitragemöglichkeiten.

Annahme 4.1.9 (Konstantes Preisniveau von 1). *Der Preis für eine Einheit des Konsumgutes sei zu beiden Zeitpunkten gleich 1.*

Das heißt, daß die Analyse ohne Unterschied in realen oder nominalen Einheiten durchgeführt werden kann, und Inflation keine Rolle spielt.

Annahme 4.1.10 (Gleichgewicht existiert). *Es wird angenommen, daß ein Marktgleichgewicht existiert.*

Unter diesen Annahmen werden Investoren sicher keine Portfolios wählen, die für einen gegebenen Erwartungswert größere Varianz haben als nötig. Das diene als Motivation für die Suche nach Portfolios mit minimaler Varianz: Den Randportfolios.

4.2 Der Portfoliorand

Es werden zunächst die normierten Portfolios betrachtet, die bei gegebenem Renditenerwartungswert minimale Varianz haben. Sie werden als Randportfolios bezeichnet, und hier werden einige Eigenschaften der Randportfolios hergeleitet. Die Menge aller Randportfolios bildet den Portfoliorand. [3]

4.2.1 Das Optimierungproblem

Die Kovarianzmatrix $\mathbf{V}_r$ und der Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}_r$ beziehen sich hier auf die Renditen und sind hier nach Annahme 4.1.1 exogen gegeben, also bekannte Konstanten. Gesucht sind jetzt die normierten Portfolios, die minimale Varianz haben für einen bestimmten Erwartungswert. Dieser Renditeerwartungswert μ ist also hier ein Parameter, und je nach μ bekommt man verschiedene Portfolios heraus.

Definition (Randportfolio). Ein Randportfolio ist ein normiertes Portfolio, das für seinen vorgegebenen Renditeerwartungswert die kleinstmögliche Varianz hat. Es handelt sich also um einen Vektor $\hat{\mathbf{y}}_p$ mit $\hat{\mathbf{y}}_p'\mathbf{1} = 1$, also $\hat{\mathbf{y}}_p \in \hat{\mathcal{Y}}$, der unter allen $\hat{\mathbf{y}} \in \hat{\mathcal{Y}}$ mit gleichem Erwartungswert $\hat{\mathbf{y}}'\boldsymbol{\mu}_r = \hat{\mathbf{y}}_p{}'\boldsymbol{\mu}_r = \mu = E[\tilde{r}_p]$ minimale Varianz $\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{y}}$ hat.

[3] Die Darstellung hier folgt Huang und Litzenberger [23]

Normierte Portfolios haben für einen gegebenen Renditerwartungswert μ minimale Varianz (sind also Randportfolios) genau dann, wenn sie Lösung dieses Optimierungsproblems sind:

J	Zahl der Basiswertpapiere (ohne risikoloses)
$\tilde{\mathbf{r}}$	Vektor der J stochastischen Assetrenditen

Gegeben:

$\boldsymbol{\mu}_r \in \mathbb{R}^J$	Vektor der Renditeerwartungswerte
$\mathbf{V}_r \in \mathbb{R}^{J\times J}$	Kovarianzmatrix der Renditen

Gesucht:

$\hat{\mathbf{y}}_\mu$	Gewichte eines normierten Portfolios mit Erwartungswert μ und minimaler Varianz

$$\min_{\hat{\mathbf{y}}\in\mathbb{R}^J} \quad \frac{1}{2} \underset{1\times J}{\hat{\mathbf{y}}'} \underset{J\times J}{\mathbf{V}_r} \underset{J\times 1}{\hat{\mathbf{y}}} \tag{4.3}$$

$$\text{udN} \quad \underset{1\times J}{\hat{\mathbf{y}}'} \underset{J\times 1}{\boldsymbol{\mu}_r} = \mu \tag{4.4}$$

$$\underset{1\times J}{\hat{\mathbf{y}}'} \underset{J\times 1}{\mathbf{1}} = 1. \tag{4.5}$$

Minimiert werden soll also die Varianz, unter der Bedingung, daß der Erwartungswert konstant vorgegebenen Parameter entspricht (erste Nebenbedingung) und der Investor voll investiert ist (zweite Nebenbedingung). Jeder Lösungsvektor hierzu ist also ein Randportfolio. Die Lagrange-Funktion dazu und die notwendigen Bedingungen für ein Minimum sind:

$$L(\hat{\mathbf{y}}, \lambda, \gamma) = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{y}} - \lambda(\hat{\mathbf{y}}'\boldsymbol{\mu}_r - \mu) - \gamma(\hat{\mathbf{y}}'\,\mathbf{1} - 1) \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\mathbf{y}}} = \mathbf{V}_r\hat{\mathbf{y}} - \lambda\boldsymbol{\mu}_r - \gamma\mathbf{1} \quad \overset{!}{\underset{J\times 1}{=}} \mathbf{0} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mu - \hat{\mathbf{y}}'\boldsymbol{\mu}_r \quad \overset{!}{\underset{1\times 1}{=}} 0 \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 1 - \hat{\mathbf{y}}'\,\mathbf{1} \quad \overset{!}{\underset{1\times 1}{=}} 0 \tag{4.9}$$

Hinreichend für ein Minimum ist, daß $\mathbf{V}_r$ positiv definit ist, und das ist ja nach Annahme der Fall.

Um dieses Gleichungssystem aufzulösen, multipliziere man (4.7) von links mit der Inversen $\mathbf{V}_r^{-1}$ der Kovarianzmatrix, die nach Annahme 4.1.3 existiert:

$$\hat{\mathbf{y}} = \lambda \mathbf{V}_r^{-1} \boldsymbol{\mu}_r + \gamma \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1}. \tag{4.10}$$

Damit hat man eine Gleichung für den gesuchten Vektor $\hat{\mathbf{y}}$, aber die beiden Lagrangemultiplikatoren λ und γ sind noch nicht bekannt. Zu ihrer Ermittlung multipliziere man dann (4.10) jeweils mit $\boldsymbol{\mu}_r$ und $\mathbf{1}$, dabei (4.8) und (4.9) beachtend:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_r' \hat{\mathbf{y}} &= \lambda \boldsymbol{\mu}_r' \mathbf{V}_r^{-1} \boldsymbol{\mu}_r + \gamma \boldsymbol{\mu}_r' \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1} = \mu \\ \mathbf{1}' \hat{\mathbf{y}} &= \lambda \mathbf{1}' \mathbf{V}_r^{-1} \boldsymbol{\mu}_r + \gamma \mathbf{1}' \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Hier hat man ein gewöhnliches lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten (λ und γ) und zwei Gleichungen (denn $\mathbf{V}_r$ und $\boldsymbol{\mu}_r$ sind ja bekannt, und μ ist ein Parameter).

Jetzt seien zur Vereinfachung die Skalare A, B, C, D wie folgt definiert (sie sind offenbar nur von $\mathbf{V}_r$ und $\boldsymbol{\mu}_r$ abhängig, bei gegebenen Assets also konstant):

$$A := \mathbf{1}' \mathbf{V}_r^{-1} \boldsymbol{\mu}_r = \boldsymbol{\mu}_r' \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1} \tag{4.12}$$

$$B := \boldsymbol{\mu}_r' \mathbf{V}_r^{-1} \boldsymbol{\mu}_r \qquad > 0 \tag{4.13}$$

$$C := \mathbf{1}' \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1} \qquad > 0 \tag{4.14}$$

$$D := BC - A^2 \qquad > 0, \tag{4.15}$$

damit ist das Gleichungssystem (4.11) vereinfacht:

$$\lambda B + \gamma A = \mu \tag{4.16}$$

$$\lambda A + \gamma C = 1, \tag{4.17}$$

und die beiden Lagrangemultiplikatoren ergeben sich (in Abhängigkeit von dem Parameter μ) zu:

$$\lambda = \frac{\mu C - A}{D} \qquad \gamma = \frac{B - \mu A}{D}. \tag{4.18}$$

Die reellen Zahlen B und C sind positiv, da das Inverse einer positiv definiten Matrix auch positiv definit ist, und ebenso ist D positiv[4].

Dann kann man diese Lösungen $\hat{\mathbf{y}}_\mu$, also die normierten Portfolios, die für den Renditenerwartungswert μ minimale Varianz haben, durch Einsetzen in

[4]Denn

$$\begin{aligned} 0 &< (A\boldsymbol{\mu}_r - B\mathbf{1})' \mathbf{V}_r^{-1} (A\boldsymbol{\mu}_r - B\mathbf{1}) = (A^2 B - 2ABA + B^2 C) \\ &= B(BC - A^2) = BD > 0, \end{aligned}$$

und da $B > 0$ auch $D > 0$.

(4.10) so schreiben:

$$\hat{\mathbf{y}}_\mu = \overbrace{\left(\frac{\mu C - A}{D}\right)}^{\lambda} \mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu}_r \qquad + \qquad \overbrace{\left(\frac{B - \mu A}{D}\right)}^{\gamma} \mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1}, \tag{4.19}$$

und umgruppieren ergibt:

$$= \underbrace{\frac{1}{D}\left[B(\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1}) - A(\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu}_r)\right]}_{\hat{\mathbf{g}}} \quad + \quad \underbrace{\frac{1}{D}\left[C(\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu}_r) - A(\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1})\right]}_{\mathbf{h}} \cdot \mu. \tag{4.20}$$

Man definiere nun wie angedeutet diese Vektoren $\hat{\mathbf{g}}$ und $\mathbf{h}$, die auch nur von $\mathbf{V}_r$ und $\boldsymbol{\mu}_r$ abhängen und damit konstant sind:

$$\hat{\mathbf{g}} := \frac{1}{D}\left[B(\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1}) - A(\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu}_r)\right] \tag{4.21}$$

$$\mathbf{h} := \frac{1}{D}\left[C(\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu}_r) - A(\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1})\right]. \tag{4.22}$$

Dies sind beides J-dimensionale Vektoren, nämlich Portfolios. Sie haben die Eigenschaft, daß

$$\boldsymbol{\mu}_r'\hat{\mathbf{g}} = \frac{1}{D}\left[B(\boldsymbol{\mu}_r'\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1}) - A(\boldsymbol{\mu}_r'\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu}_r)\right] \qquad = \frac{BA - AB}{D} = 0 \tag{4.23}$$

$$\mathbf{1}'\hat{\mathbf{g}} = \frac{1}{D}\left[B(\mathbf{1}'\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1}) - A(\mathbf{1}'\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu}_r)\right] \qquad = \frac{BC - AA}{D} = 1 \tag{4.24}$$

(da ja $D = BC - A^2$)

$$\boldsymbol{\mu}_r'\mathbf{h} = \frac{1}{D}\left[C(\boldsymbol{\mu}_r'\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu}_r) - A(\boldsymbol{\mu}_r'\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1})\right] \qquad = \frac{CB - AA}{D} = 1 \tag{4.25}$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{h} = \frac{1}{D}\left[C(\mathbf{1}'\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu}_r) - A(\mathbf{1}'\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1})\right] \qquad = \frac{CA - AC}{D} = 0. \tag{4.26}$$

Also ist $\hat{\mathbf{g}}$ ein Portfoliovektor, der senkrecht zum Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}_r$ steht. Das bedeutet erstens, daß $\hat{\mathbf{g}}$ den Renditeerwartungswert 0 hat, und zweitens entsprechend, daß, wenn man ein beliebiges anderes Portfolio hat, und (ein Vielfaches von) $\hat{\mathbf{g}}$ dazuaddiert, man den Erwartungswert des Portfolios nicht ändert.

Außerdem ist $\mathbf{1}'\hat{\mathbf{g}} = 1$, also ist $\hat{\mathbf{g}}$ ein auf eine Investition von einer Währungseinheit normiertes Portfolio (daher das Dach).

Auf der anderen Seite ist $\mathbf{h}$ senkrecht zu dem Einsenvektor $\mathbf{1}$, anders gesagt: die Summe der Einsätze ist Null, d. h. es ist ein Arbitrageportfolio, bei dem man so kauft und (leer-)verkauft, daß man in der Summe nichts investiert. Das bedeutet also, wenn man ein normiertes Portfolio hat, und (ein Vielfaches von) $\mathbf{h}$ dazuaddiert, man immer noch ein normiertes Portfolio hat.

Außerdem ist $\boldsymbol{\mu}_r'\mathbf{h} = 1$, also hat $\mathbf{h}$ einen Renditeerwartungswert von 1.

Nun diese beiden Portfolios eingesetzt in (4.20), und man bekommt die schöne Formel, die fast alle Probleme löst[5]:

Satz 10 (Randportfolio mit gegebenem Erwartungswert). *Das Randportfolio mit Renditenerwartungswert μ ist gegeben durch*

$$\boxed{\hat{\mathbf{y}}_\mu = \hat{\mathbf{g}} + \mu \cdot \mathbf{h}} \tag{4.27}$$

Was heißt das? Man kann zunächst all sein Vermögen in das Portfolio $\hat{\mathbf{g}}$ investieren, und hat dann ein Randportfolio, allerdings mit einer niedrigen erwarteten Rendite von Null. Dieses Portfolio kann man dann mittels des Portfolios $\mathbf{h}$ umschichten (es benötigt ja keine Einsätze), und damit kann man jeden beliebigen Renditenerwartungswert erreichen, und hat jeweils das Portfolio minimaler Varianz für den gegebenen Erwartungswert.

Jedes Randportfolio hat genau einen Erwartungswert. Aber das umgekehrte gilt auch: Für jeden Erwartungswert gibt es genau ein Randportfolio. Es gibt also eine Eins-zu-eins-Korrespondenz zwischen Renditeerwartungswert und den Assetgewichten eines Randportfolios, das diesen Erwartungswert hat.

Definition (Portfoliorand). Der Portfoliorand ist die Menge Randportfolios, also aller normierten Portfolios, die für einen bestimmten Erwartungswert minimale Varianz haben.

Der Portfoliorand im Assetraum

Diese spannende Formel zeigt, daß alle Randportfolios im Assetraum auf einer einzigen Geraden liegen, und damit zwei beliebige verschiedene Randportfolios den Portfoliorand aufspannen, z. B. hier $\hat{\mathbf{g}}$ und $\hat{\mathbf{g}} + \mathbf{h}$. Der Portfoliorand ist damit ein eindimensionaler Teilraum des Assetraums, mit dem Ortsvektor $\hat{\mathbf{g}}$ und dem Richtungsvektor $\mathbf{h}$. In Bild 4.1 wird dies für den Fall mit drei Assets veranschaulicht. Die gestrichelt gezeichnete Fläche ist die Hyperebene, in diesem Falle leider nur zweidimensional, der normierten Portfolios, der Vektor $\hat{\mathbf{g}}$ ist ein normiertes Portfolio, und der Richtungsvektor $\mathbf{h}$ liegt dann in dieser Ebene und spannt die Gerade der Randportfolios auf.

Alle Portfolios auf dieser Geraden sind Randportfolios, und alle Randportfolios liegen auf dieser Geraden im Assetraum. Die Differenz beliebiger Randportfolios ist also ein Vielfaches von $\mathbf{h}$, und durch hinzufügen von mehr oder weniger $\mathbf{h}$ kommt man von einem beliebigen zu allen Randportfolios. Dabei hängen die Position auf der Geraden und der Erwartungswert eines

[5] Das ist der Fall, da die notwendigen Bedingungen der Lagrangefunktion oben auch hinreichend waren, und damit jedes Portfolio entsprechend (4.27) ein Randportfolio ist und umgekehrt.

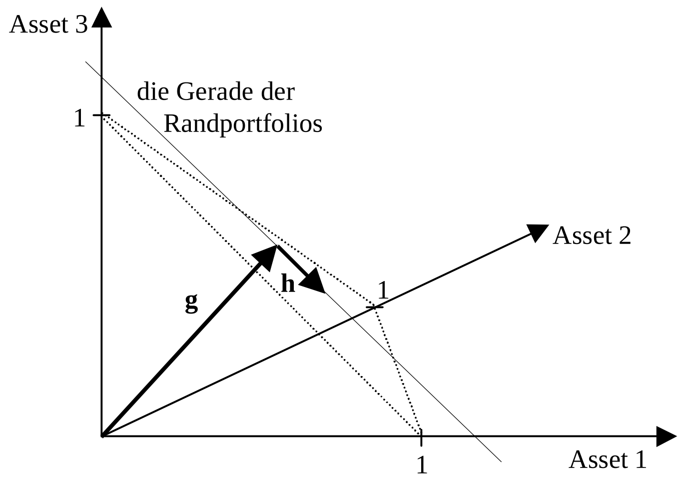

Abbildung 4.1: **Der Portfoliorand im Assetraum.**

Portfolios linear zusammen. Der Endpunkt von $\hat{\mathbf{g}}$ ist das Randportfolio mit Erwartungswert von Null, und wenn man noch $\mathbf{h}$ anhängt, ist man beim Randportfolio mit Erwartungswert eins angekommen.

Und für beliebige Renditeerwartungswerte gibt die Formel sofort an, welches Portfolio diesen Erwartungswert bei minimaler Varianz hat.

Satz 11 (Portfoliorand konvex). *Gegeben zwei beliebige Randportfolios* $\hat{\mathbf{y}}_0$ *und* $\hat{\mathbf{y}}_1$ *mit Renditeerwartungswerten* μ_0 *und* μ_1*, dann gilt:*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \hat{\mathbf{y}}_\alpha := (1-\alpha)\hat{\mathbf{y}}_0 + \alpha \hat{\mathbf{y}}_1$$

ist wieder ein Randportfolio mit Renditenerwartungswert $(1-\alpha)\mu_0 + \alpha\mu_1$.

Wenn man also einen Teil des Vermögens in ein Randportfolio investiert, und den Rest in ein anderes Randportfolio, dann hat man wieder ein Randportfolio. Außerdem kann man auf diese Art und Weise alle Randportfolios erreichen:

Satz 12 (Aufspannen des Portfoliorandes). *Gegeben zwei beliebige (verschiedene) Randportfolios* $\hat{\mathbf{y}}_0$ *und* $\hat{\mathbf{y}}_1$ *mit Renditeerwartungswerten* $\mu_0 \neq \mu_1$*, dann läßt sich jedes Randportfolio* $\hat{\mathbf{y}}$ *schreiben als*

$$\hat{\mathbf{y}} = (1-\alpha)\hat{\mathbf{y}}_0 + \alpha \hat{\mathbf{y}}_1$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

Der Portfoliorand wird also von zwei beliebigen verschiedenen Randportfolios aufgespannt. Wenn jeder Investor nur Randportfolios halten möchte, dann heißt das also, daß man zwei Randportfolios fest bestimmen kann, und dann jeder Investor mit einer bestimmten Kombination dieser beiden Portfolios zufrieden ist. Dies ist Zwei-Fonds-Separation, die in Abschnitt 5.4 behandelt wird.

4.2.2 Varianz, Kovarianz, und Korrelation

Bisher ist beschrieben worden, welche Portfolios im Assetraum Randportfolios sind, und welchen Erwartungswert sie haben. Nun soll untersucht werden, wie Erwartungswert und Varianz der Randportfolios zusammenhängen. Der Zusammenhang ist quadratisch, wie sich herausstellen wird.

Um die Lage der Randportfolios im μ-σ-Raum charakterisieren zu können, sei zunächst die Varianz eines Randportfolios mit gegebenem Erwartungswert angegeben.

Varianz der Randportfolios

Die Varianz eines beliebigen Randportfolios p (in Abhängigkeit vom Renditeerwartungswert μ_p) läßt sich berechnen wie die Varianz eines jeden Portfolios:

$$\sigma_p^2 = \hat{\mathbf{y}}_p{}' \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{y}}_p, \tag{4.28}$$

und Einsetzen von (4.27) ergibt:

$$= (\hat{\mathbf{g}} + \mu_p \mathbf{h})' \mathbf{V}_r (\hat{\mathbf{g}} + \mu_p \mathbf{h}) \tag{4.29}$$

$$= (\hat{\mathbf{g}}' \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{g}}) + 2\,\mu_p (\mathbf{h}' \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{g}}) + \mu_p^2 (\mathbf{h}' \mathbf{V}_r \mathbf{h}), \tag{4.30}$$

(hier erkennt man schon, daß die Varianz eines Randportfolios einfach eine quadratische Funktion des Erwartungswertes ist (da $\hat{\mathbf{g}}$ und $\mathbf{h}$ ja nur von $\mathbf{V}_r$ und $\boldsymbol{\mu}_r$ abhängen), und weitere Berechnungen ergeben:

$$\sigma_p^2 = \frac{B}{D} + 2\frac{A}{D}\,\mu_p + \frac{C}{D}\,\mu_p^2 \tag{4.31}$$

und da lassen sich die Quadrate ergänzen zu

$$\sigma_p^2 = \frac{C}{D}\left(\mu_p - \frac{A}{C}\right)^2 + \frac{1}{C} \tag{4.32}$$

Was ist bisher erreicht? Für jeden Renditenerwartungswert μ läßt sich mittels einer einfachen, linearen, geschlossenen Formel (die im wesentlichen eine Matrixinversion braucht) sofort ein normiertes Portfolio minimaler Varianz angeben, und diese Varianz läßt sich auch mittels (4.32) sofort angeben, als quadratische Funktion von μ.

Wie man aus Gleichung (4.32) erkennt, kann die Varianz eines Randportfolios nicht kleiner als $1/C$ werden.

Erwartungswert der Randportfolios

Diese Formel für die Varianz eines Randportfolios läßt sich natürlich auch auflösen nach dem Renditeerwartungswert eines Portfolios mit gegebener Varianz σ_p^2. Es gibt keine Lösung für $\sigma_p^2 < 1/C$, genau eine Lösung für $\sigma_p^2 = 1/C$, und genau zwei Lösungen für $\sigma_p^2 > 1/C$. Hier also der Erwartungswert eines Randportfolios in Abhängigkeit von der Varianz[6]:

$$\mu_p = E[\tilde{r}_p] = \frac{A}{C} \pm \sqrt{\frac{D}{C}\left(\sigma_p^2 - \frac{1}{C}\right)} \tag{4.33}$$

Alternativ kann man den Zusammenhang auch in impliziter Form schreiben:

Zusammenhang zwischen Erwartungswert und Standardabweichung, Steigung

$$C\sigma_p^2 - \frac{C^2(\mu_p - A/C)^2}{D} = 1, \tag{4.34}$$

was einem dann erlaubt, das totale Differential zu bilden.

$$2C\sigma_p \, d\sigma_p - 2\frac{C^2(\mu_p - A/C)}{D} \, d\mu_p = 0 \tag{4.35}$$

Daraus ergibt sich die Steigung des Portfoliorands in der μ-σ-Ebene:

$$\frac{d\mu_p}{d\sigma_p} = \frac{D\sigma_p}{C\mu_p - A} \tag{4.36}$$

Diese Steigung ist gleich der marginalen Rate der Transformation zwischen Erwartungswert und Standardabweichung.

Zusammenhang zwischen Erwartungswert und Varianz, Steigung

Wenn man jetzt nicht die Standardabweichung, sondern die Varianz betrachtet, kann man natürlich von der gleichen Gleichung (4.34) ausgehend σ_p^2 auch als eigene Variable, nämlich die Varianz, und nicht als Quadrat einer anderen Variablen sehen, was einem dann erlaubt, dieses totale Differential zu bilden:

$$C \, d(\sigma_p^2) - 2\frac{C^2(\mu_p - A/C)}{D} \, d\mu_p = 0 \tag{4.37}$$

Daraus ergibt sich die Steigung des Portfoliorands in der μ-σ^2-Ebene:

$$\frac{d\mu_p}{d(\sigma_p^2)} = \frac{D}{C\mu_p - A} = \frac{1}{\lambda_\mu} \tag{4.38}$$

[6] Ein rationaler Investor würde natürlich nur „+“ wählen, den höheren Erwartungswert.

Diese Steigung ist gleich der marginalen Rate der Transformation zwischen Erwartungswert und Varianz. Wenn man mit Gleichung (4.18) auf Seite 58 vergleicht, stellt man fest, daß es sich um das Inverse des Lagrangemultiplikators λ handelt, der sich also als marginale Rate der Transformation zwischen Varianz und Erwartungswert interpretieren läßt.

Kovarianz

Nun sei die Kovarianz zwischen einem Randportfolio p und einem beliebigen (normierten) Portfolio q berechnet. Dabei wird benutzt, daß man das Randportfolio nach Gleichung (4.19) so darstellen kann:

$$\hat{\mathbf{y}}_p = \overbrace{\left(\frac{\mu_p C - A}{D}\right)}^{\lambda_p} \mathbf{V}_r^{-1} \boldsymbol{\mu}_r + \overbrace{\left(\frac{B - \mu_p A}{D})\right)}^{\gamma_p} \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1}.$$

Also, los geht's:

$$\begin{aligned}
\sigma_{pq} = cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) &= \hat{\mathbf{y}}_p{}' \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{y}}_q && (4.39)\\
&= [\lambda_p \mathbf{V}_r^{-1} \boldsymbol{\mu}_r + \gamma_p \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1}]' \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{y}}_q && (4.40)\\
&= \lambda_p \boldsymbol{\mu}_r' \hat{\mathbf{y}}_q + \gamma_p \mathbf{1}' \hat{\mathbf{y}}_q, && (4.41)
\end{aligned}$$

und das ist, da $\hat{\mathbf{y}}_q{}' \boldsymbol{\mu}_r = \mu_q$ und q ein normiertes Portfolio ist,

$$\begin{aligned}
&= \lambda_p \cdot \mu_q + \gamma_p && (4.42)\\
&= \frac{\mu_p C - A}{D} \cdot \mu_q + \frac{B - \mu_p A}{D} && (4.43)\\
&= \frac{1}{D} \big(C \mu_p \mu_q - A(\mu_p + \mu_q) + B\big) && (4.44)\\
&= \frac{C}{D}(\mu_p - A/C)(\mu_q - A/C) + \frac{1}{C} && (4.45)
\end{aligned}$$

Hier ist zu bemerken, daß die Kovarianz, die ein beliebiges Portfolio mit einem beliebigen Randportfolio hat, nur von den Renditeerwartungswerten der beiden Portfolios abhängt, was insbesondere bedeutet, daß *alle* Portfolios mit gleichem μ, also alle auf einer horizontalen Linie im μ-σ-Raum, die *gleiche* Kovarianz zu einem bestimmten festen Randportfolio p haben. Das gilt, egal welches Randportfolio p man festsetzt.

Außerdem sieht man in Gleichung (4.45), daß die Kovarianz von beliebigen Portfolios q mit einem festen Randportfolio p sogar eine lineare Funktion des Erwartungswertes μ_q ist.

Korrelation

Die Korrelation eines beliebigen Portfolios q mit einem Randportfolio p ist gegeben durch

$$\rho_{qp} = cor(\tilde{r}_q, \tilde{r}_p) = \frac{\sigma_{qp}}{\sigma_q \cdot \sigma_p} = \frac{\hat{\mathbf{y}}_q \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{y}}_p}{\sqrt{\hat{\mathbf{y}}_q \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{y}}_q \cdot \hat{\mathbf{y}}_p \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{y}}_p}} \tag{4.46}$$

$$= \frac{\mu_q \cdot (C\mu_p - A) - A\mu_p + B}{\sigma_q \sqrt{(C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B)}} \tag{4.47}$$

$$= \frac{\sigma_p \left(\mu_q - \mu_{zc(p)}\right)}{\sigma_q \left(\mu_p - \mu_{zc(p)}\right)} \tag{4.48}$$

und, falls auch q ein Randportfolio ist,

$$= \frac{\sigma_{qp}}{\sqrt{\sigma_{qp}^2 + \frac{(\mu_p - \mu_q)^2}{D}}} \tag{4.49}$$

Die erste Zeile ist nur die Definition, die zweite Zeile setzt ein, was vorher an Ausdrücken für Varianz und Kovarianz von Portfolios berechnet war, die dritte Zeile drückt die Korrelation sehr hübsch mit Hilfe des Erwartungswertes des Nullkovarianzportfolios aus, das später besprochen wird. Die letzte Zeile schließlich verdeutlicht, daß (ohne risikoloses Asset) zwei Randportfolios nur dann perfekt korreliert sind, wenn sie identisch sind.

4.2.3 Global minimale Varianz, Nullkovarianz

Das globale Minimum-Varianz Portfolio

Die Varianz eines Randportfolios

$$\sigma^2 = \frac{C}{D}(\mu - A/C)^2 + \frac{1}{C}$$

hat offenbar ein Minimum für $\mu = A/C$. Das ist das globale Portfolio minimaler Varianz, und es heißt *mvp*. Es gilt offenbar:

$$E[\tilde{r}_{mvp}] = \mu_{mvp} = \frac{A}{C} = \frac{\boldsymbol{\mu}_r' \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1}} = A\,\sigma_{mvp}^2 \tag{4.50}$$

$$Var[\tilde{r}_{mvp}] = \sigma_{mvp}^2 = \frac{1}{C} = \frac{1}{\mathbf{1}' \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1}} \tag{4.51}$$

Die Varianz des *mvp* erhält man also, indem man den Kehrwert der Summe aller Elemente des Inversen der Kovarianzmatrix bildet.

Die Assetgewichte für das *mvp* sind nach Gleichung (4.19) gegeben durch

$$\hat{\mathbf{y}}_{mvp} = \lambda_{mvp} \mathbf{V}_r^{-1} \boldsymbol{\mu}_r + \gamma_{mvp} \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1} \tag{4.52}$$

$$= \left(\frac{A/C \cdot C - A}{D} \right) \mathbf{V}_r^{-1} \boldsymbol{\mu}_r + \left(\frac{B - A/C \cdot A}{D} \right) \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1} \tag{4.53}$$

$$= \frac{\mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1}}. \tag{4.54}$$

Sie lassen sich also einfach berechnen, indem man für jede Zeile der invertierten Kovarianzmatrix horizontal alle Elemente aufaddiert, und den resultierenden Vektor normiert, indem man durch die Summe seiner Elemente teilt.

Effiziente und ineffiziente Portfolios

Rationale Investoren werden sicher nicht ein beliebiges Randportfolio wählen, sie unterscheiden sich ganz erheblich. Nach Gleichung (4.33) gibt es ja für jede gegebene Varianz $\sigma^2 > \sigma^2_{mvp}$ genau zwei Randportfolios, nämlich das mit maximalem und das mit minimalem Erwartungswert für die gegebene Varianz.

Jedes Randportfolio mit größerem Erwartungswert als das *mvp* ist insofern gut, als kein Portfolio mit derselben Varianz einen höheren Erwartungswert hat. Diese Randportfolios heißen effizient.

Jedes Randportfolios mit kleinerem Erwartungswert als das *mvp* ist insofern schlecht, als dazu viele Portfolios gibt, die bei gleicher Varianz einen höheren Erwartungswert haben. Daher heißen sie ineffizient. (Siehe Bild 4.3 auf Seite 72.)

Die normierten Portfolios dazwischen werden manchmal zulässige Portfolios genannt.

Definition (Effiziente und ineffiziente Portfolios). Effiziente Portfolios sind Randportfolios mit einem Erwartungswert größer als der des globalen Minimum-Varianz Portfolios, $\mu_e > \mu_{mvp}$. Sie haben maximalen Erwartungswert für ihre Varianz.

Ineffiziente Portfolios sind Randportfolios mit einem Erwartungswert kleiner als der des des globalen Minimum-Varianz Portfolios, $\mu_i < \mu_{mvp}$. Sie haben minimalen Erwartungswert für ihre Varianz.

Kovarianz mit dem globalen Minimum-Varianz Portfolio

Wenn man den Erwartungswert des Portfolios global minimaler Varianz $\mu_{mvp} = A/C$ einsetzt in die Formel zur Berechnung der Kovarianz zwischen Randportfolios, dann erhält man für beliebige normierte Portfolios q als Kovarianz zwischen q und dem *mvp*:

$$cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_{mvp}] = \sigma_{q,mvp} = \frac{C}{D}\left(\mu_q - \frac{A}{C}\right)\left(\frac{A}{C} - \frac{A}{C}\right) + \frac{1}{C} = \frac{1}{C} = \sigma^2_{mvp}.$$

Das bedeutet, daß *alle* Portfolios die gleiche Kovarianz zum *mvp* haben![7] Umgekehrt heißt das natürlich, daß jedes Portfolio (nicht nur Randportfolios) mit dem globalen Minimum-Varianz Portfolio positiv korreliert ist.

[7] Dieser Zusammenhang gilt auch, wenn alle Assets entgegen Annahme den gleichen Erwartungswert haben.

Satz 13 (Konstante Kovarianz mit dem *mvp*). *Jedes normierte Portfolio (nicht nur Randportfolios) hat die gleiche Kovarianz zum globalen Minimum-Varianz Portfolio:*

$$\boxed{\sigma_{q,mvp} = \sigma^2_{mvp} \quad \forall q} \tag{4.55}$$

Im Assetraum (Bild 4.1 auf Seite 61) sieht das so aus: Die Randportfolios liegen auf einer Geraden. Auf dieser Geraden liegt auch das globale Minimum-Varianz Portfolio[8]. Auf einer Hälfte der Geraden liegen nun die effizienten, und spiegelbildlich dazu auf der anderen Seite die ineffizienten Portfolios. Alle effizienten Portfolios liegen also auf einer (offenen) Halbgeraden. Das bedeutet aber, daß die Menge der effizienten Portfolios konvex ist, d. h. eine Mischung von effizienten Portfolios (ohne Leerverkäufe) ist auch effizient:

Satz 14 (Effiziente Portfolios konvex). *Die Menge aller effizienten Portfolios (also Portfolios mit maximalem Erwartungswert für gegebene Varianz) ist konvex (nämlich eine Halbgerade im Assetraum). Jede konvexe Linearkombination von effizienten Portfolios (mit nichtnegativen Koeffizienten mit Summe 1) ist wieder ein effizientes Portfolio.*

Nach dem intuitiven hier noch ein formaler Beweis, der auf der Tatsache beruht, daß man jedes Randportfolio als Summe aus Portfolio $\hat{\mathbf{g}}$ und einem Vielfachen von $\mathbf{h}$ schreiben kann:

Seien $\hat{\mathbf{y}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{y}}_n, \ldots, \hat{\mathbf{y}}_N$ effiziente Portfolios, d. h. Randportfolios mit $\mu_n > \mu_{mvp}$, und $\alpha_1, \ldots, \alpha_N > 0$ positive reelle Zahlen mit $\sum_n \alpha_n = 1$, dann ist die konvexe Linearkombination der Portfolios

$$\sum_n \alpha_n \hat{\mathbf{y}}_n = \sum_n \alpha_n (\hat{\mathbf{g}} + \mu_n \mathbf{h}) \tag{4.56}$$

$$= \hat{\mathbf{g}} + (\sum_n \alpha_n \mu_n)\mathbf{h} \tag{4.57}$$

wieder ein Randportfolio mit Erwartungswert

$$\sum_n \alpha_n \mu_n > \sum_n \alpha_n \mu_{mvp} = \mu_{mvp} \tag{4.58}$$

größer dem Erwartungswert des *mvp*, also ist es effizient.

Nullkovarianzportfolios

Oben ist die Formel (4.45) für die Kovarianz beliebiger Portfolios mit Randportfolios hergeleitet worden. Sie hatte das verblüffende Resultat, daß die

[8] Nämlich da, wo diese Gerade das innerste Isovarianzellipsoid (mit kleinster Varianz für normierte Portfolios) tangiert.

Kovarianz eines Portfolios q zu einem festen Randportfolio p linear von dem Erwartungswert von q abhängt.

Nun kann man sich fragen, ob es denn zu einem Randportfolio auch Portfolios gibt, die unkorreliert mit ihm sind – und da es einen linearen Zusammenhang gibt, ist das wohl sicher der Fall.

Setzen wir also die Kovarianz zum Randportfolio p einfach null:

$$\sigma_{p,q} = \frac{C}{D}\left(\mu_p - \frac{A}{C}\right)\left(\mu_q - \frac{A}{C}\right) + \frac{1}{C} \stackrel{!}{=} 0 \tag{4.59}$$

Dann läßt sich leicht errechnen[9], daß

$$\mu_q = \frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{\mu_p - \frac{A}{C}}$$

Alle Portfolios mit diesem Renditenerwartungswert haben eine Kovarianz mit dem Randportfolio p von Null. Das Randportfolio mit diesem Erwartungswert heiße Nullkovarianzportfolio zu p, notiert $zc(p)$. Hier ein paar Identitäten, die in verschiedenen Situationen helfen können, den Renditenerwartungswert des Nullkovarianzportfolios zu einem Randportfolio p zu berechnen (in Abschnitt 4.2.4 wird darauf eingegangen, wie man es graphisch findet.):

$$\begin{aligned}
\mu_{zc(p)} &= A/C - \frac{D/C^2}{\mu_p - A/C} && (4.60)\\
&= \mu_{mvp} - \frac{\sigma^2_{mvp}\, D/C}{\mu_p - \mu_{mvp}} && (4.61)\\
&= \mu_p - \frac{\sigma^2_p\, D/C}{\mu_p - \mu_{mvp}} && (4.62)\\
&= \frac{\mu_p\, A - B}{\mu_p\, C - A} = \frac{\sigma^2_p\, A - \mu_p}{\sigma^2_p\, C - 1} && (4.63)\\
&= \frac{\mu_{mvp}\, \sigma^2_p - \mu_p\, \sigma^2_{mvp}}{\sigma^2_p - \sigma^2_{mvp}} && (4.64)
\end{aligned}$$

Nochmal: Alle Portfolios mit diesem Erwartungswert haben keine Kovarianz mit p, aber nur das Randportfolio mit Erwartungswert $\mu_{zc(p)}$ heißt Nullkovarianzportfolio. Die Assetgewichte des Nullkovarianzportfolios ergeben sich mit Gleichung (4.19) zu:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{y}}_{zc(p)} &= \lambda_{zc(p)}\, \mathbf{V}_r^{-1} \boldsymbol{\mu}_r + \gamma_{zc(p)}\, \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1}, && (4.65)\\
&= \left(\frac{\mu_{zc(p)} C - A}{D}\right) \mathbf{V}_r^{-1} \boldsymbol{\mu}_r + \left(\frac{B - \mu_{zc(p)} A}{D}\right) \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1}, && (4.66)
\end{aligned}$$

[9] Vorausgesetzt, $\mu_p \neq \mu_{mvp} = \frac{A}{C}$.

und nach endlich vielen Schritten

$$\hat{\mathbf{y}}_{zc(p)} = \frac{\mathbf{V}_r^{-1}(\boldsymbol{\mu}_r - \mu_p\,\mathbf{1})}{A - \mu_p C} \tag{4.67}$$

$$= \frac{\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu}_r - \mu_p\,\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\,(\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu}_r - \mu_p\,\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1})} \tag{4.68}$$

Damit hat man eine Formel für die Berechnung der Assetgewichte des Nullkovarianzportfolios zu einem Randportfolio mit gegebenem Erwartungswert μ_p. Man beachte, daß der Nenner des Bruchs nur den Vektor auf eine Summe von 1 normiert. [10]

Die Varianz des Nullkovarianzportfolios zum Randportfolio p ist:

$$\sigma^2_{zc(p)} = \frac{C}{D}\left(\mu_{zc(p)} - \frac{A}{C}\right)^2 + \frac{1}{C} \tag{4.69}$$

$$= \frac{D/C^3}{\left(\mu_p - \frac{A}{C}\right)^2} + \frac{1}{C} \tag{4.70}$$

$$= \frac{C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B}{(C\mu_p - A)^2} \tag{4.71}$$

Wie sieht es im Assetraum aus? Man stelle sich die Gerade der Randportfolios vor, und darauf ein effizientes Randportfolio p. Woanders auf der Geraden sei mvp.

Nun sei ein Punkt q auf der Geraden betrachtet, der bei p startet, und in Richtung mvp wandert.

Die Formel (4.32) zeigt, daß zwischen der Kovarianz beliebiger Portfolios q mit p, σ_{qp}, und dem Erwartungswert dieses beliebigen Portfolios μ_q ein linearer Zusammenhang besteht.

Die Kovarianz von q und p ist am Start, wenn $q = p$, gerade die Varianz von p, nämlich σ_p^2. Nun wandere der Punkt q in Richtung mvp, und linear fällt der Erwartungswert μ_q, und linear bewegt sich die Kovarianz σ_{qp} mit. Nun komme q bei mvp an, also $q = mvp$. Die Kovarianz des mvp mit p ist aber bekannt – es ist die Varianz von mvp, weil mvp mit jedem Portfolio die gleiche Kovarianz hat (Satz 13). Nun ist σ^2_{mvp} aber sicher kleiner als σ_p^2, sonst wäre es ja nicht das globale Minimum-Varianz Portfolio. Die Kovarianz σ_{qp} ist also von σ_p^2 auf σ^2_{mvp} gesunken. Und da der Zusammenhang auch weiter linear ist, wird die Kovarianz σ_{qp} noch weiter sinken – bis sie bei Null ankommt, dann ist man beim Nullkovarianzportfolio $q = zc(p)$, und noch weiter darüber hinaus, ins Negative. Portfolios jenseits des $zc(p)$ (also

[10] Ein Tip zum praktischen Berechnen der Gewichte des Nullkovarianzportfolios geht daraus hervor: Man zieht einfach vom Erwartungswert jeden Assets den Erwartungswert von p ab, multipliziert den resultierenden Vektor $\mathbf{b} = \boldsymbol{\mu}_r - \mu_p\,\mathbf{1}$ mit dem Inversen der Kovarianzmatrix (oder löst das Gleichungssystem $\mathbf{V}_r\mathbf{y} = \mathbf{b}$), und normiert den resultierenden Vektor so, daß die Summe der Elemente gerade eins ergibt.

alle normierten Portfolios, deren Erwartungswert kleiner $\mu_{zc(p)}$ ist) sind also negativ mit p korreliert.

Was sollte das zeigen? Im wesentlichen, daß es zu jedem Randportfolio genau ein Nullkovarianzportfolio gibt, und das liegt auf der anderen Seite von *mvp*. Ist also ein Randportfolio effizient, ist das Nullkovarianzportfolio dazu ineffizient, und umgekehrt. Und das *mvp* hat kein Nullkovarianzportfolio.

Diese Intuition wird durch Gleichung (4.61) bestätigt, wenn man bedenkt, daß D positiv ist:

$$(\mu_p - \mu_{mvp})(\mu_{mvp} - \mu_{zc(p)}) = D/C^2. \tag{4.72}$$

Man betrachtet also, um wieviel der Erwartungswert eines effizienten Portfolios p den Erwartungswert des *mvp* übersteigt, und das ist umgekehrt proportional zu dem Wert, um den der Erwartungswert des Nullkovarianzportfolios $zc(p)$ unter μ_{mvp} liegt. Genauso gilt, daß auf der Geraden mit den Randportfolios im Assetraum der Abschnitt von *mvp* zu p umgekehrt proportional ist zum Abschnitt (in die andere Richtung) von *mvp* zu $zc(p)$.

Satz 15 (Nullkovarianzportfolios). *Jedes Randportfolio p (außer dem globalen Minimum-Varianz Portfolio mvp) hat genau ein Nullkovarianzportfolio $zc(p)$. Das Nullkovarianzportfolio dazu $zc(zc(p))$ ist wieder p. Genau eines der beiden Randportfolios $p, zc(p)$ ist effizient, das andere ist ineffizient.*

Die Beträge, um die sich die Erwartungswerte vom Erwartungswert des mvp unterscheiden, sind umgekehrt proportional (Gleichung (4.72)).

Alle Portfolios zwischen p und seinem Nullkovarianzportfolio $zc(p)$ sind positiv mit p korreliert, alle Portfolios jenseits von $zc(p)$ negativ.

Wozu das Nullkovarianzportfolio? Es wird im nächsten Abschnitt eine wichtige Rolle spielen, wenn es um den linearen Zusammenhang zwischen erwarteten Renditen und Kovarianzen geht. Außerdem läßt sich damit die Korrelation eines Portfolios mit einem Randportfolio schön ausdrücken, wie oben in Gleichung (4.48) gesehen.

Im nächsten Abschnitt wird ein linearer Zusammnehang zwischen Wertpapierrendite und Kovarianz zu einem Randportfolio hergeleitet, aber zunächst sollen die bisherigen Ergebnisse in verschiedenen anderen Räumen graphisch veranschaulicht werden.

4.2.4 Der Portfoliorand im μ-σ-Raum

Hier soll der Portfoliorand anschaulich im μ-σ-Raum dargestellt werden. Jedes Portfolio (also auch jedes Asset) hat einen Erwartungswert und eine Standardabweichung der Rendite, kann also als Punkt in einem zweidimensionalen Raum repräsentiert werden. Jedem Portfolio entspricht ein Punkt, aber ein Punkt kann mehreren Portfolios (mit gleichem Erwartungswert und Varianz) entsprechen.

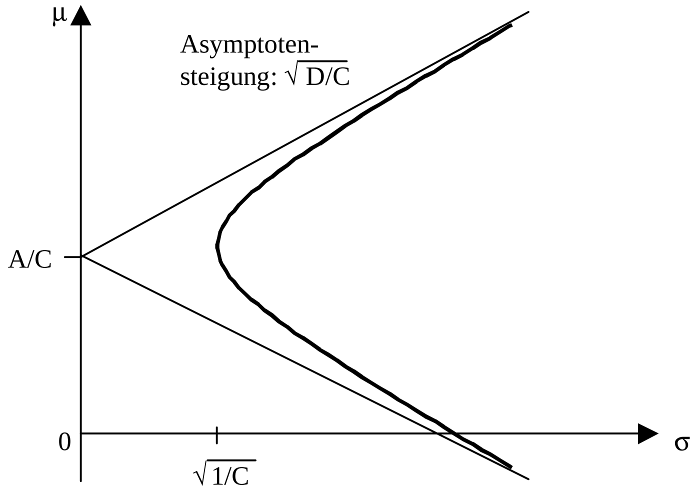

Abbildung 4.2: **Der Portfoliorand im μ-σ-Raum.**

Bild 4.2 zeigt den Portfoliorand. Er ist eine Hyperbel, deren Scheitelpunkt ein Portfolio ist mit einer Renditenerwartung von $\frac{A}{C}$ und Standardabweichung von $\frac{1}{\sqrt{C}}$. Eine Hyperbel ist durch Asymptoten begrenzt, die hier die Steigung $\sqrt{D/C}$ haben.[11]

Die Hyperbel geht unbegrenzt ins positive und negative, also auch zu Randportfolios mit erwarteten Renditen $\mu < -1$, die also eine Nachzahlung fordern — auch, wenn die Assets alle beschränkte Haftung habe. Das liegt daran, daß man beliebig unvernünftige Leerverkäufe machen kann.

mvp, effiziente und ineffiziente Portfolios

Jeder Punkt auf der Hyperbel entspricht also eindeutig einem *Rand*portfolio $\hat{\mathbf{y}}$, und umgekehrt. Die anderen normierten Portfolios liegen rechts im Inneren der Hyperbel. Der Scheitelpunkt ist das Portfolio global minimaler Varianz. Die Randportfolios, die auf dem Ast darüber liegen, heißen effizient, die Randportfolios auf dem unteren Ast ineffizient, Bild 4.3.

Rationale Investoren mit μ-σ-Präferenz wählen nur effiziente Portfolios.

Nullkovarianzportfolio $zc(p)$ und Beta

Zur Bestimmung des Nullkovarianzportfolios $zc(p)$ eines Randportfolios p (siehe Bild 4.4) zeichne man die Tangente[12] an p, und gehe von dem Punkt, in dem sie die vertikale Achse schneidet, horizontal nach rechts, bis man

[11] Im Falle, daß ein risikoloses Asset existiert, entartet der Portfoliorand zu zwei Halbgeraden.

[12] Sie hat die Steigung $\frac{D\sigma_p}{C\mu_p - A}$.

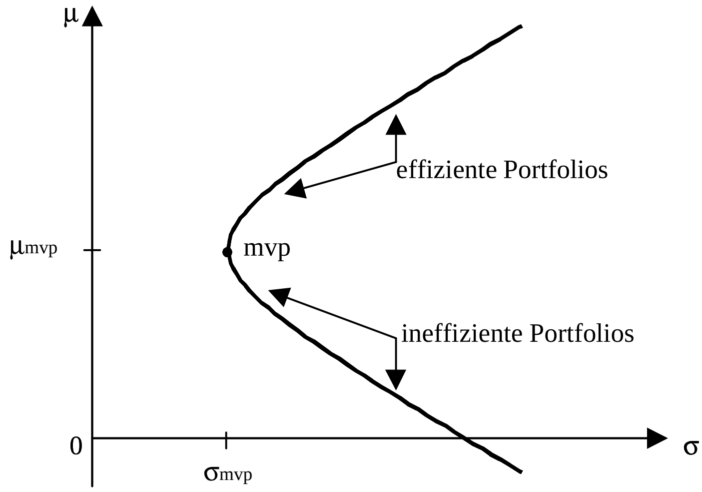

Abbildung 4.3: ***mvp*, effiziente und ineffiziente Portfolios.**

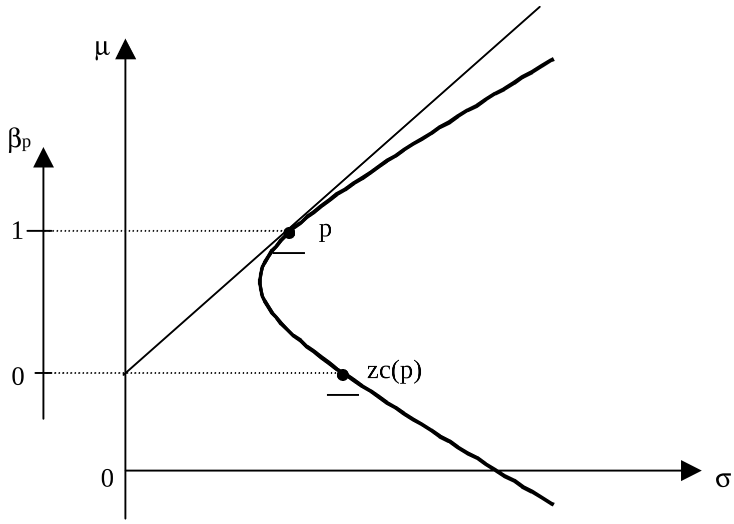

Abbildung 4.4: **Nullkovarianzportfolio** $zc(p)$ **und Beta.**

den Portfoliorand trifft: Das ist das $zc(p)$. Alle Portfolios, die auf einer horizontalen Linie liegen, haben die gleich Kovarianz relativ zu p, also haben alle Portfolios horizontal rechts von p eine Kovarianz von σ_p^2, alle horizontal rechts von $zc(p)$ eine Kovarianz von 0 zu p.

Das bedeutet weiterhin, daß alle Portfolios auf einer horizontalen Linie (mit gleichem Erwartungswert) das gleiche Beta relativ zu p haben, nämlich 1 auf der Höhe von p, 0 auf der Höhe von $zc(p)$, und linear dazwischen und darüberhinaus.

Portfolios mit einer Standardabweichung kleiner der von p können kein β über eins haben. Portfolios mit einem β größer 1 haben also einen Erwartungswert und Varianz größer als die von p.

Dies alles gilt für beliebige Randportfolios p.

Die Porfolios auf der Höhe von mvp haben die gleiche Kovarianz zu allen Randportfolios, nämlich σ_{mvp}^2. Und das mvp selbst hat die gleiche Kovarianz zu allen Portfolios, nämlich auch σ_{mvp}^2.

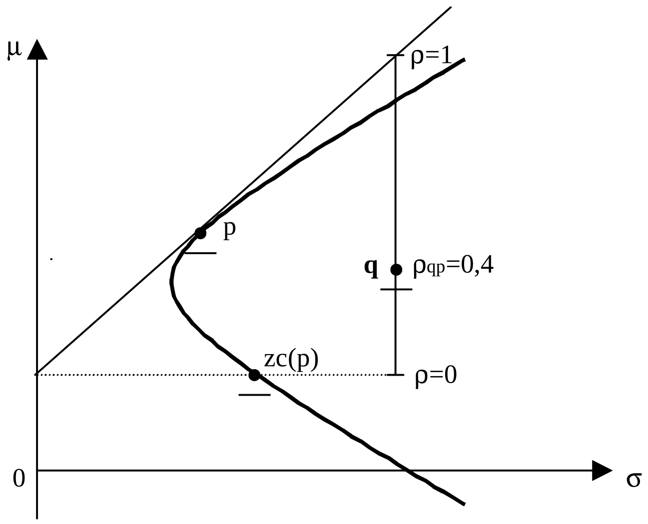

Abbildung 4.5: **Korrelation zum Randportfolio p.**

Korrelation zum Randportfolio p

Nun soll eine hübsche Interpretation für die Korrelation von beliebigen Portfolios zum Randportfolio p gegeben werden, siehe Bild 4.5. Man betrachte wieder die Tangente an die Hyperbel in p, und die horizontale Linie zum Nullkovarianzportfolio $zc(p)$. Möchte man die Korrelation eines beliebigen Portfolios q zum Randportfolio wissen, ziehe man eine senkrechte Linie durch q und markiere die beiden Punkte, an dem sie die Tangente und die horizontale Linie schneidet. Der obere Punkt entspricht einer Korrelation ρ_{qp} von 1, der untere von 0, und linear dazwischen und darüberhinaus. Man entnimmt dem Bild 4.5, daß kein Portfolio perfekt mit dem Randportfolio p korreliert ist, und alle Portfolios horizontal rechts von $zc(p)$ eine Korrelation von 0 zum Portfolio p haben — sie haben ja auch keine Kovarianz zu p.

Alle Portfolios auf einer Linie durch den Punkt, in dem die Tangente die senkrechte Achse trifft, haben die gleiche Korrelation zu p.

Für alle Portfolios q auf der senkrechten Linie durch p, also alle Portfolios mit der gleichen Standardabweichung σ_p wie p, sind Beta β_{qp} und Korrelation ρ identisch.

4.2.5 Der Portfoliorand im μ-σ^2-Raum

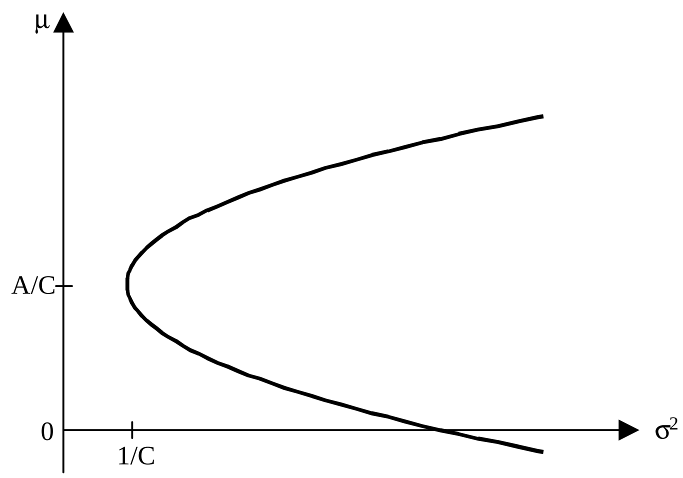

Abbildung 4.6: **Der Portfoliorand im μ-σ^2-Raum.**

Trägt man auf der vertikalen Achse den Renditeerwartungswert eines Portfolios auf, und auf der vertikalen Achse die *Varianz* der Rendite, dann ist der Portfoliorand eine Parabel, die durch Gleichung (4.32) gegeben ist:

$$\sigma_p^2 = \frac{C}{D}\left(\mu_p - \frac{A}{C}\right)^2 + \frac{1}{C} = \frac{C}{D}\left(\mu_p - \mu_{mvp}\right)^2 + \sigma_{mvp}^2$$

Die Varianz ist also minimal für $\mu = \frac{A}{C} = \mu_{mvp}$, und steigt für höhere (oder niedrigere) Erwartungswerte quadratisch an. Der Scheitelpunkt der Parabel ist also das Portfolio global minimaler Varianz mit, wie man der Gleichung entnimmt, Erwartungswert von A/C und Varianz von $1/C$ (Bild 4.6).

Das Nullkovarianzportfolio $zc(p)$

Zur Bestimmung des Nullkovarianzportfolios $zc(p)$ eines Randportfolios p im μ-σ^2-Raum (Bild 4.7) zeichne man eine Sekante von p durch das mvp, und

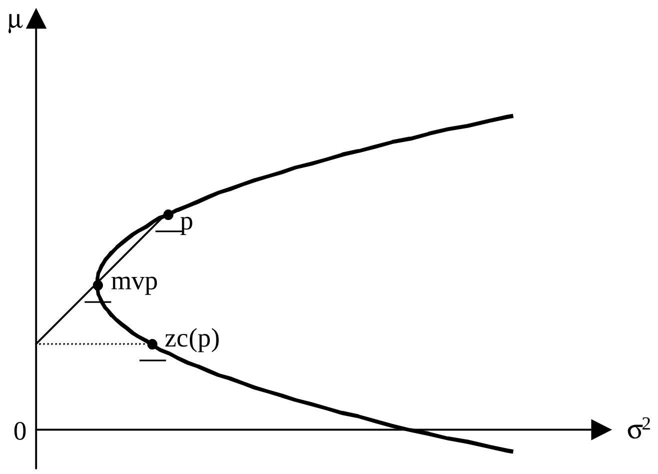

Abbildung 4.7: **Das Nullkovarianzportfolio** $zc(p)$**.**

gehe von dem Punkt, in dem sie die vertikale Achse schneidet, horizontal nach rechts, bis man den Portfoliorand trifft: Das ist das $zc(p)$.

Die weiteren Eigenschaften bleiben gleich, alle Portfolios, die auf einer horizontalen Linie liegen, haben die gleiche Kovarianz und gleiches Beta relativ zu p. Diese Kovarianz läßt sich im Bild leicht finden:

Kovarianz im μ-σ^2-Raum

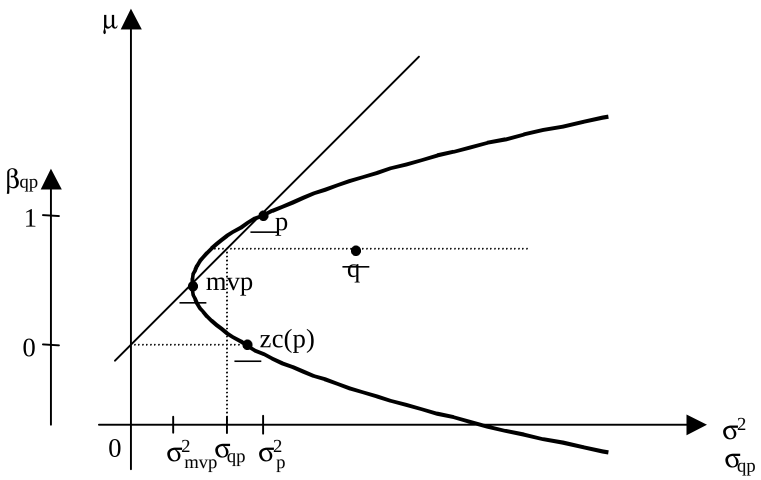

Abbildung 4.8: **Kovarianz im μ-σ^2-Raum.**

Die Kovarianz zu p aller Portfolios auf der Höhe von p ist gleich der

Varianz von p, die der Portfolios auf der Höhe von mvp ist gleich der Varianz von mvp, und die der Portfolios auf der Höhe von $zc(p)$ ist gerade 0, und der Zusammenhang ist wie gesagt linear.

Man kann die Kovarianz eines beliebigen Portfolios q zum Randportfolio p also finden, indem man einfach eine horizontale Linie von q zur Sekante zieht, und vom Schnittpunkt nach unten geht. Der Achsenabschnitt des Schnittpunktes auf der horizontalen Achse ist die Kovarianz σ_{qp}. Offenbar haben Portfolios mit einem Erwartungswert kleiner dem des $zc(p)$ eine negative Kovarianz zu p.

Dies alles gilt für beliebige Randportfolios p. Man kann sich hier anschaulich machen, was passiert, wenn man das Portfolio p verschiebt.

4.2.6 Systematisches und unsystematisches Risiko

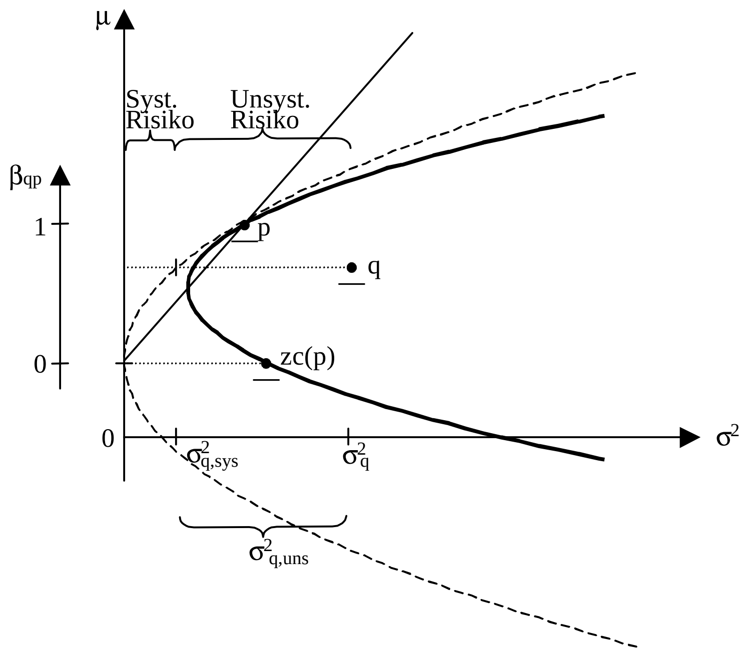

Abbildung 4.9: **Systematisches und unsystematisches Risiko.**

Im μ-σ^2-Raum kann man auch schön systematisches und unsystematisches Risiko veranschaulichen.

Das Risiko eines beliebigen Portfolios q setzt sich zusammen aus systematischem Risiko, das sich aus der Korrelation mit dem Markt ergibt, und einem unsystematischen (und diversifizierbaren) Risiko.

Man kann also die Varianz σ_q^2 eines beliebigen Portfolios q unterteilen in systematische Varianz $\sigma_{q\,sys}^2$, die sich aus der Korrelation mit dem Marktri-

Tabelle 4.1: Korrespondenzen zwischen Assetraum, μ-σ-Raum, und μ-σ^2-Raum

	Gleichung	Assetraum	μ-σ-Raum	μ-σ^2-Raum
Isomearen	$\mathbf{y}'\boldsymbol{\mu}_r = c$	$(J-1)$-dim. TR		
Isovarianz	$\mathbf{y}'\mathbf{V}_r\mathbf{y} = c$	Hyperellipsoid		
Normierte Portfolios	$\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{1} = 1$	$(J-1)$-dim. TR $\hat{\mathcal{Y}}$	ganze Ebene	ganze Ebene
darin Portfoliorand	$\hat{\mathbf{y}}'\boldsymbol{\mu}_r = c$	Gerade	Hyperbel	Parabel
darin Isomearen	$\hat{\mathbf{y}}'\boldsymbol{\mu}_r = c$	$(J-2)$-dim. Hyperebene	horizontale Halbgerade vom Portfoliorand nach rechts	
darin Isovarianzellipsoide	$\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{y}} = c$	Hyperellipsoid (eine Dim. weniger)	vertikale Strecke vom oberen zum unteren Ast des Portfoliorands	
darin PF mit gleichem μ, σ		Hyperellipsoid ($J-3$ Freiheitsgrade)	ein Punkt	

siko ergibt, und unsystematische Varianz $\sigma^2_{q\,uns}$, und es gilt:

$$\sigma^2_q = \sigma^2_{q\,sys} + \sigma^2_{q\,uns} = \beta_{q,p}\sigma^2_p + \sigma^2_{q\,uns}. \tag{4.73}$$

Im Bild 4.9 sieht man, da Beta linear mit dem Erwartungswert zusammenhängt, daß die systematische Varianz eines Portfolios q auf einer Parabel im μ-σ^2-Raum liegt.

Schneidet man diese gepunktete Parabel mit der horizontalen Linie, auf der q liegt, dann ist der Anteil der Varianz von q links vom Schnittpunkt systematisch, der Rest unsystematisch.[13]

Man sieht sofort, daß alle Portfolios außer p selbst unsystematisches Risiko haben müssen. Alle Portfolios mit einem Erwartungswert gleich dem des Nullkovarianzportfolios von p haben kein systematisches Risiko, sie korrelieren nicht mit dem Markt.

4.2.7 Korrespondenz zwischen Assetraum und μ-σ-Raum

Jeder Punkt auf dem Rand der Hyperbel im μ-σ-Raum entspricht genau einem Punkt auf der Geraden der normierten Randportfolios im Assetraum und umgekehrt.

Andere zulässige normierte Portfolios (Punkte im $(J-1)$-dimensionalen Teilraum der normierten Portfolios im Assetraum) liegen im Inneren der Hyperbel, da sie, bei gleichem Erwartungswert, größere Varianz haben.

[13] Den Anteil, der rechts von der gepunkteten Parabel, aber links vom Portfoliorand liegt, kann man erklären als systematisches Risiko bezüglich des Nullkovarianzportfolios $zc(p)$.

Alle normierten Portfolios mit einem bestimmten Erwartungswert μ liegen in einem $J-2$-dimensionalen Teilraum des Assetraums[14], und in diesem Teilraum wiederum liegen ineinander die Isovarianzellipsoide.

Dieser Teilraum im Assetraum enspricht einer horizontalen Halbgeraden im μ-σ-Raum, die von rechts kommend links an der Hyperbel des Portfoliorands endet. Jeder Punkt darauf entspricht einem Isovarianzellipsoid im betrachteten Teilraum des Assetraums, je kleiner die Varianz, desto weiter innen das Ellipsoid. Der Endpunkt ist ein Randportfolio, nämlich das Zentrum der Isovarianzellipsoide in dem besagten Teilraum im Assetraum.

Dabei ist der Zusammenhang zwischen Position auf der Geraden im Assetraum und dem Erwartungswert des Portfolios linear, wie aus (4.27) hervorgeht, und auch zur Kovarianz mit einem beliebigen festen Randportfolio, wie aus (4.45) hervorgeht.

4.3 Der lineare Zusammenhang zwischen Rendite und Kovarianz

Jetzt kommt das eigentliche mathematische[15] Herzstück des CAPM, der lineare Zusammenhang von erwarteter Rendite und Kovarianz eines Portfolios.

Oben war hergeleitet worden, daß, gegeben ein *beliebiges* Randportfolio p, die Kovarianz eines beliebigen Portfolios q mit diesem Randportfolio *nur* vom Erwartungswert des Portfolios q abhängt.

Nämlich, nach Gleichung (4.45) für alle Randportfolios p und alle normierten Portfolios q:

$$\sigma_{pq} = cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = \frac{C}{D}(\mu_p - A/C)(\mu_q - A/C) + \frac{1}{C}$$

Diese Gleichung kann man natürlich umgekehrt auch nach dem Renditenerwartungswert μ_q auflösen:

$$\mu_q = \frac{\frac{D}{C}(\sigma_{pq} - \frac{1}{C})}{\mu_p - \frac{A}{C}} + \frac{A}{C} = \frac{\frac{D}{C}\,\sigma_{pq}}{\mu_p - \frac{A}{C}} + \frac{A}{C} - \frac{\frac{D}{C^2}}{\mu_p - \frac{A}{C}}$$

[14]Sofern nicht alle Assets den gleichen Erwartungswert haben und somit $\boldsymbol{\mu}_r$ kollinear mit $\mathbf{1}$ wäre, was aber nach Annahme 4.1.2 ausgeschlossen ist

[15]Dieser Zusammenhang ist rein mathematisch und gilt für beliebige Zufallsvariablen, von denen man Erwartungswertvektor und Kovarianzmatrix hat. Ökonomischen Gehalt bekommt das CAPM durch den Nachweis der Effizienz des Marktportfolios.

und mittels Gleichung (4.60):

$$\begin{aligned}\mu_q &= \frac{\frac{D}{C}\,\sigma_{pq}}{\mu_p - \frac{A}{C}} + \mu_{zc(p)} = \frac{\sigma_{pq}}{\sigma_p^2}\frac{\frac{D}{C}\,\sigma_p^2}{\mu_p - \frac{A}{C}} + \mu_{zc(p)} \\ &= \frac{\sigma_{pq}}{\sigma_p^2}\left(\mu_p - \mu_p + \frac{\frac{D}{C}\,\sigma_p^2}{\mu_p - \frac{A}{C}}\right) + \mu_{zc(p)}\end{aligned} \tag{4.74}$$

und mittels Gleichung (4.62):

$$\mu_q = \frac{\sigma_{pq}}{\sigma_p^2}(\mu_p - \mu_{zc(p)}) + \mu_{zc(p)} \tag{4.75}$$

$$\mu_q = \mu_{zc(p)} + \frac{\sigma_{pq}}{\sigma_p^2}(\mu_p - \mu_{zc(p)}) \tag{4.76}$$

Nun sei noch β definiert als Abkürzung:

Definition (Beta). Für alle Randportfolio p und beliebige normierte Portfolios q sei

$$\beta_{qp} = \frac{\sigma_{qp}}{\sigma_p^2} = \frac{cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_p]}{Var[\tilde{r}_p]} = \frac{\hat{\mathbf{y}}_q{}' \, \mathbf{V}_r \, \hat{\mathbf{y}}_p}{\hat{\mathbf{y}}_p{}' \, \mathbf{V}_r \, \hat{\mathbf{y}}_p} \tag{4.77}$$

Dies ist das Beta von q bezüglich des Randportfolios p.

Es gilt:

$$\mu_q = \mu_{zc(p)} + \beta_{qp}(\mu_p - \mu_{zc(p)}) \tag{4.78}$$

$$= (1 - \beta_{qp})\mu_{zc(p)} + \beta_{qp}\mu_p \tag{4.79}$$

$$= \beta_{q,zc(p)}\mu_{zc(p)} + \beta_{qp}\mu_p \tag{4.80}$$

Damit kann man (4.76) so schreiben:

$$\mu_q = \mu_{zc(p)} + \beta_{qp} \cdot (\mu_p - \mu_{zc(p)}) \tag{4.81}$$

oder, in längerer Notation,

$$E[\tilde{r}_q] = E[\tilde{r}_{zc(p)}] + \beta_{qp} \cdot (E[\tilde{r}_p] - E[\tilde{r}_{zc(p)}]) \tag{4.82}$$

Das bedeutet, daß der Erwartungswert aller Portfolios linear zusammenhängt mit der Kovarianz, den sie bezüglich eines Randportfolios haben. Man wählt ein Randportfolio p fest, bestimmt seine Varianz, die ja in das $\beta_{qp} = \frac{\sigma_{qp}}{\sigma_p^2}$ eingeht, bestimmt das Nullkovarianzportfolio $zc(p)$ und seinen

Erwartungswert, und schon gilt Gleichung (4.81). Allerdings gilt das für jedes Randportfolio[16], und sagt wenig aus über die Assets und ihre Renditen, sondern ist vielmehr eine Eigenheit der Randportfolios. Die Präferenzen der Investoren haben für die Herleitung dieser Gleichung keine Rolle gespielt.

Dieser lineare Zusammenhang gilt für alle normierten Portfolios, und damit auch für Portfolios, die Einheitsvektoren sind – also auch für alle J Assets einzeln. Damit ist bei gegebener erwarteter Auszahlung der Preis des Assets implizit gegeben.

Es ist wert, noch einmal zu rekapitulieren, unter welchen Umständen diese Gleichung gilt. Sie ist hergeleitet worden allein aus einigen Charakteristika der Assetrenditen, namentlich der Matrix der Varianzen und Kovarianzen einerseits und dem Vektor der Erwartungswerte der Renditen, mehr nicht. Die Annahmen, die in diese Gleichung eingingen, waren, daß die Kovarianzmatrix existiert, invertierbar sei und die Erwartungswerte nicht alle identisch seien – mehr nicht.[17]

Diese Gleichung ist wohlgemerkt noch nicht das CAPM. Das CAPM behauptet, daß dieser lineare Zusammenhang auch besteht bezüglich des *Marktportfolios* – mit anderen Worten, daß das Marktportfolio ein Randportfolio ist. Wenn das Marktportfolio m ein Randportfolio ist, dann gilt offenbar Gleichung (4.81) auch für $p = m$, und die erwartete Rendite eines Assets j ist linear abhängig von seinem Marktbeta β_{jm} Das wird im nächsten Abschnitt untersucht.

4.4 Marktportfolio und Gleichgewicht

Bisher wurden nur allgemeine Zusammenhänge zwischen der erwarteten Renditen der Assets untersucht.

Hier soll kurz folgendes gezeigt werden: Falls alle Investoren effiziente Portfolios wählen, dann ist das Markportfolio m auch ein effizientes Portfolio. Das folgt im wesentlichen sofort, wenn man sich klarmacht, daß das Marktportfolio nichts anderes ist als eine Kombination der Portfolios der einzelnen Investoren, gewichtet mit dem Anteil ihres Vermögens am Gesamtvermögen. Hier die Überlegung im Detail:

[16] Für ein bestimmtes Randportfolio wird der Zusammenhang besonders einfach, nämlich für das Nullkovarianzportfolio $zc(\hat{\mathbf{g}})$ des (eindeutig bestimmten) Randportfolios mit Erwartungswert Null $\hat{\mathbf{g}}$.

Da $\mu_{zc(zc(g))} = \mu_g = 0$, kann man Gleichung (4.81) so schreiben:

$$\mu_q = \beta_{q,zc(g)} \cdot \mu_{zc(g)} \quad \text{oder} \quad E[\tilde{r}_q] = \beta_{q,zc(g)} \cdot E[\tilde{r}_{zc(g)}] \tag{4.83}$$

Der Erwartungswert jeden Portfolios ist also gleich seinem Beta bezüglich des Randportfolios $\hat{\mathbf{g}}$ mal dem (konstanten) Erwartungswert $\mu_{zc(\hat{\mathbf{g}})}$.

[17] Also die Annahmen bezüglich der Assets, 4.1.1, 4.1.2, und 4.1.3), und vielleicht noch die homogene Erwartungen 4.1.6, damit man überhaupt von *einer* Kovarianzmatrix sprechen kann, und der vollkommene Markt, damit man alle Portfolios bilden kann.

Das Marktportfolio

Investor i ist ausgestattet mit einem zu investierenden Vermögen von W^i. Das Gesamtvermögen aller Investoren, also das Marktvermögen, der Wert des Marktes, der Wert aller Assets, ist dann $W^m = \sum_{i=1}^I W^i$.

Die Investoren möchten einen bestimmten Betrag in jedes Asset j investieren, nämlich Investor i den Betrag W_j^i in Asset j.

Um zu beschreiben, welchen *Anteil* seines Vermögens er in dieses Asset stecken möchte, sei diese Nachfrage auf das Gesamtvermögen des Investors W^i normiert:

$$y_j^i := \frac{W_j^i}{W^i} \tag{4.84}$$

bezeichne also den Anteil seines Vermögens, den Investor i in j investieren möchte. $\hat{\mathbf{y}}^i$ ist also ein normiertes Portfolio, nämlich das Portfolio, welches Investor i halten möchte. Wenn der Investor nach Annahme 4.1.4 μ-σ-Präferenzen hat, ist es natürlich auch ein effizientes Portfolio.

Nun sei die Sache von der Seite der Assets betrachtet. Investor i steckt $W_j^i = y_j^i W^i$ in j, also sind insgesamt $\sum_{i=1}^I W_j^i = \sum_{i=1}^I y_j^i W^i$ in j gesteckt.

Das ist also, was der Gesamtmarkt in j steckt, und damit der Marktwert von j, also

$$W_j^m := \sum_{i=1}^I W_j^i = \sum_{i=1}^I y_j^i W^i. \tag{4.85}$$

Nun sei dies auf das Gesamtvermögen W^m (der Wert aller Assets) normiert, also

$$y_j^m := \frac{W_j^m}{W^m} = \sum_{i=1}^I y_j^i \frac{W^i}{W^m}. \tag{4.86}$$

Das bezeichnet also den Anteil des Werts von Asset j am Gesamtmarkt. Auch diese Anteile kann man in einen Vektor zusammenfassen, $\hat{\mathbf{y}}^m$. Das ist das Marktportfolio, und es gilt:

Definition (Marktportfolio). Das Marktportfolio ist das Portfolio, in dem die einzelnen Assets mit einem Anteil vertreten sind, der dem Anteil ihres Wertes am Gesamtwert aller Assets entspricht, also $y_j^m = \frac{W_j^m}{W^m}$.

Äquivalent dazu: Das Marktportfolio ist das Portfolio, in dem die Portfolios der einzelnen Investoren mit einem Anteil vertreten sind, der dem Anteil ihres Vermögens am Gesamtvermögen entspricht, also

$$\hat{\mathbf{y}}^m := \sum_{i=1}^I \frac{W^i}{W^m} \cdot \hat{\mathbf{y}}^i. \tag{4.87}$$

Auf die letzte Gleichung kann man nun unmittelbar Satz 14 anwenden über die Konvexität der Menge der effizienten Portfolios. Es ist $\frac{W^i}{W^m}$ einfach eine Zahl (nämlich das Gewicht, mit dem das Portfolio des $i$ten Investors in das Marktportfolio eingeht); die Gewichte sind alle größer Null und summieren sich zu 1. Also ist das Marktportfolio eine konvexe Linearkombination der Portfolios der einzelnen Investoren, und da die Menge der effizienten Portfolio nach Satz 14 konvex ist, ist das Marktportfolio auch effizient, wenn das Portfolio jedes Investors effizient ist.

Die Annahme über die besondere Form der Investorpräferenzen im CAPM erlaubt also den Schluß, daß jeder Investor effiziente Randportfolios wählt, und damit auch das Marktportfolio ein effizientes Randportfolio ist. Also gilt die lineare Beziehung 4.81 zwischen Erwartungswert und Beta eines Assets bezüglich des Marktportfolios:

4.4.1 Die Renditebeziehung im Gleichgewicht

Dann gilt für alle Portfolios q (also auch Assets j) der lineare Zusammenhang *relativ zum Marktportfolio* m:

$$\mu_q = \mu_{zc(m)} + \beta_{qm} \cdot (\mu_m - \mu_{zc(m)}) \tag{4.88}$$

Die erwartete Rendite eines jeden Assets und Portfolios übersteigt also $\mu_{zc(m)}$ um einen Betrag, der proportional zu seinem Marktbeta ist.

Dies ist die Wertpapiermarktlinie, die in Bild 4.10 dargestellt ist.

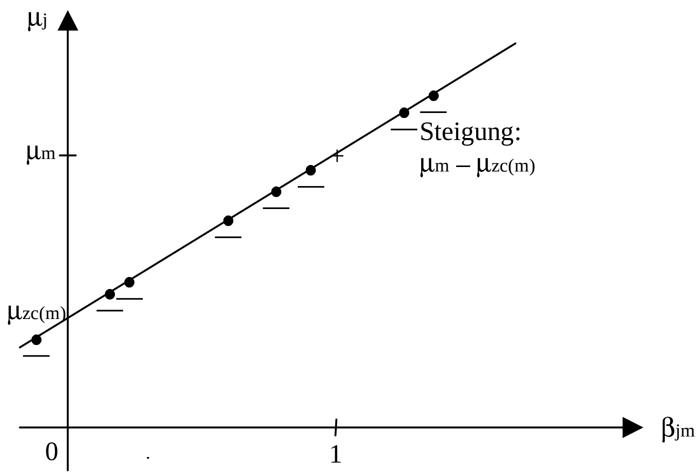

Abbildung 4.10: **Die Wertpapiermarktlinie.** *Die erwartete Rendite μ_j jedes Assets j hängt linear mit seinem Marktbeta $\beta_{j,m}$ zusammen.*

Man sieht an den Überlegungen dieses Absatzes, daß sich der Gleichgewichtsgedanke im klassischen CAPM[18] nicht *explizit* in einem Ausgleich von Angebot und Nachfrage durch die Angleichung des Preises abspielt, sondern

[18]In dem die Assets durch Renditen spezifiziert sind.

zum Tragen kommt in der Aussage, daß die Assetrenditen „irgendwie“ so sind, daß jeder Invester bekommt, was er will, seine Nachfrage also erfüllbar ist. Damit sind alle individuellen Portfolios effizient, und da der Markt genau aus allen individuellen Portfolios besteht, ist das Marktportfolio auch ein effizientes Randportfolio.

Die Aussagen des CAPM

Das CAPM sagt also im wesentlichen folgendes aus:

- Alle Investoren wählen effiziente Randportfolios. Daraus folgt:
- Das Marktportfolio ist ein effizientes Randportfolio. Daraus folgt:
- Die Wertpapiermarktlinie: Es gibt einen linearen Zusammenhang zwischen der erwarteten Rendite eines Assets und seinem Beta relativ zum Markt.

  (Bei einem Beta von eins ist die erwartete Rendite gleich der des Marktportfolios, bei einem Beta von Null gleich der risikofreien (oder hier der des Nullkovarianzportfolio des Marktes)).
- Das Beta ist das einzige Maß, das benötigt wird, um die erwartete Rendite eines Assets zu erklären, also *das* Maß für bewertungsrelevantes Risiko.
- Da das Marktportfolios effizient ist, ist seine erwartete Rendite höher als die des *mvp*, das erwartete Premium für die Übernahme von Beta-Risiko ist also positiv.

4.5 Nutzenoptimales Portfolio

Bisher wurde der Portfoliorand varianzminimaler Portfolios untersucht, und festgestellt, daß μ-σ-Investoren wohl effiziente Portfolios wählen. Nun sei kurz ein alternativer Ansatz gewählt:[19]

Jetzt sei direkt der Nutzen des einzelnen Investors i betrachtet und maximiert. Gegeben die Verteilung der Assetrenditen, muß der Investor also ein Portfolio so wählen, daß der Nutzen der stochastischen Auszahlung maximal ist.

Gegeben also:

$\boldsymbol{\mu}_r \in \mathbb{R}^J$ Vektor der Renditeerwartungswerte

[19]Dieser Abschnitt kann übersprungen werden, allerdings wird in Jarrows Gleichgewichts-CAPM und in Mertons zeitkontinuierlichem CAPM ein ähnlicher Ansatz gewählt, und ein Vergleich kann interessant sein.

$\mathbf{V}_r \in \mathbb{R}^{J\times J}$	Kovarianzmatrix der Renditen
$U^i_{\mu\sigma}$	Nutzenfunktion des Investors

Gesucht:

$\hat{\mathbf{y}}$	Normiertes Portfolio mit maximalem Nutzen

Die Nutzenfunktion des Investors ist nach Annahme 4.1.4 abhängig nur von Erwartungswert und Varianz der Rendite seines Portfolios, also ist sein Nutzen $U_{\mu\sigma}(\hat{\mathbf{y}}'\boldsymbol{\mu}_r, \hat{\mathbf{y}}'\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{y}})$, und sein Optimierungsproblem:

$$\max_{\hat{\mathbf{y}}\in\mathcal{Y}} \quad U_{\mu\sigma}(\hat{\mathbf{y}}'\boldsymbol{\mu}_r, \hat{\mathbf{y}}'\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{y}}) \tag{4.89}$$

$$\text{udN } \hat{\mathbf{y}}'\,\mathbf{1} = 1. \tag{4.90}$$

Bevor dieses Problem gelöst wird, sei zur Abkürzung folgende Kurzschreibweise für die Parameter der Nutzenfunktion eingeführt:

$$U(\circ) := U_{\mu\sigma}(\hat{\mathbf{y}}'\boldsymbol{\mu}_r, \hat{\mathbf{y}}'\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{y}}). \tag{4.91}$$

Damit sind die Lagrangefunktion und die notwendigen Bedingungen für Maxima:

$$L(\hat{\mathbf{y}}, \zeta) = U(\hat{\mathbf{y}}'\boldsymbol{\mu}_r, \hat{\mathbf{y}}'\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{y}}) - \zeta(\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{1} - 1) \tag{4.92}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\mathbf{y}}} = \frac{\partial U(\circ)}{\partial \mu}\boldsymbol{\mu}_r + \frac{\partial U(\circ)}{\partial \sigma^2}\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{y}} - \zeta\,\mathbf{1} \quad \underset{J\times 1}{\overset{!}{=}} \mathbf{0} \tag{4.93}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta} = \hat{\mathbf{y}}'\mathbf{1} - 1 \quad \underset{1\times 1}{\overset{!}{=}} 0 \tag{4.94}$$

Lösung der ersten Bedingung (4.93) nach $\hat{\mathbf{y}}$ liefert

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{V}_r^{-1}}{\frac{\partial U(\circ)}{\partial \sigma^2}}\left(\zeta\,\mathbf{1} - \frac{\partial U(\circ)}{\partial \mu}\boldsymbol{\mu}_r\right) \tag{4.95}$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $\mathbf{1}$ unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (4.94) gibt den Wert für ζ:

$$\zeta = \frac{1}{\mathbf{1}'\mathbf{V}_r\mathbf{1}}\left(\frac{\partial U(\circ)}{\partial \sigma^2} + \mathbf{1}'\mathbf{V}_r\boldsymbol{\mu}_r\frac{\partial U(\circ)}{\partial \mu}\right) = \frac{1}{C}\left(\frac{\partial U(\circ)}{\partial \sigma^2} + A\frac{\partial U(\circ)}{\partial \mu}\right) \tag{4.96}$$

$$\zeta = \frac{\partial U(\circ)}{\partial \sigma^2}\,\sigma^2_{mvp} + \frac{\partial U(\circ)}{\partial \mu}\,\mu_{mvp}, \tag{4.97}$$

mit der Definition der Skalare A und C von Seite 58, und mit den Gleichungen (4.50) und (4.51).

Eingesetzt in (4.95):

$$\hat{\mathbf{y}} = \left(\frac{1}{C} + \frac{\frac{\partial U(\circ)}{\partial \mu}}{\frac{\partial U(\circ)}{\partial \sigma^2}} \frac{A}{C} \right) \mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1} - \frac{\frac{\partial U(\circ)}{\partial \mu}}{\frac{\partial U(\circ)}{\partial \sigma^2}} \mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu}_r \tag{4.98}$$

$$= \frac{\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1}}{C} + \frac{-\frac{\partial U(\circ)}{\partial \mu}}{\frac{\partial U(\circ)}{\partial \sigma^2}} \left(\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu}_r - \frac{A}{C}\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1} \right) \tag{4.99}$$

Nun erinnere man sich, daß der Kehrwert des Quotients der partiellen Ableitungen in dieser Gleichung nach dem Satz über implizite Differentation gerade der Steigung der Indifferenzkurve des Investors ist, und das ist nach Gleichung (3.10) auf Seite 38 gerade ein Maß für die Risikoaversion des Investors, nämlich die marginale Rate der Substitution von Erwartungswert für Varianz. *Im Optimum muß natürlich diese marginale Rate der Substitution (MRS = Steigung der Indifferenzkurve des Investors) gleich der marginalen Rate der Transformation (MRT=Steigung des Portfoliorandes) entsprechen,* siehe Bild 4.11.

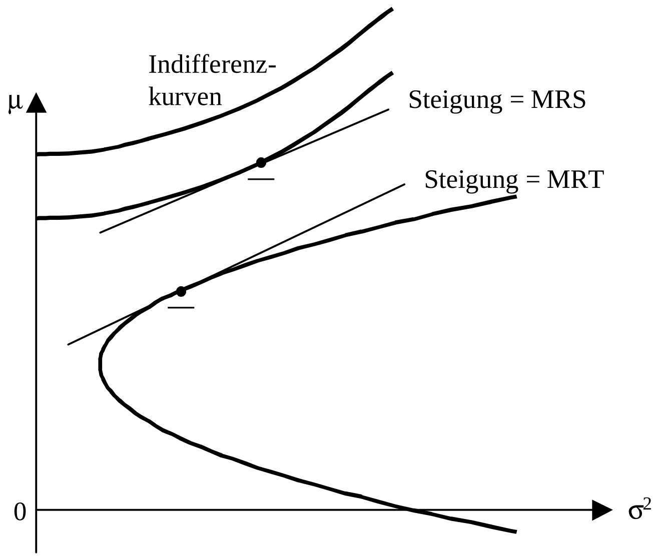

Abbildung 4.11: **Marginale Rate der Substitution und der Transformation.**

Fragen der Existenz und Eindeutigkeit eines Optimums für dieses Entscheidungsproblems werden hier nicht behandelt, sie sind aber nicht trivial. Hinreichend für die Eindeutigkeit[20] ist die strenge Quasikonkavität der Nutzenfunktion, was zu konvexen Indifferenzkurven im μ-σ-Raum führt, und zur Existenz siehe [49].

[20] Die Eindeutigkeit des Optimierungsproblems des einzelnen Investors, gegeben Preise. Ob das Gleichgewicht mit den sich einstellenden Preisen eindeutig ist, ist noch mal eine andere Fragen, und generell mit nein zu beantworten (siehe z. B. [8]).

Es gilt damit für nutzenoptimale Portfolios (wobei $(\circ)$ wieder die Parameter abkürzt):

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{V}_r^{-1}}{C} + \frac{1}{MRS_{\mu\sigma^2}(\circ)} \left(\mathbf{V}_r^{-1} \boldsymbol{\mu}_r - \frac{A}{C} \mathbf{V}_r^{-1} \mathbf{1} \right) \tag{4.100}$$

und wenn die Gleichungen für das Portfolio global minimaler Varianz (4.52) und für den Richtungsvektor $\mathbf{h}$ (4.22) eingesetzt werden, erhält man das schöne Resultat

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}_{mvp} + \frac{C/D}{MRS_{\mu\sigma^2}(\circ)} \cdot \mathbf{h}, \tag{4.101}$$

Der Investor wählt also im Grenzfall unendlich hoher Risikoaversion das *mvp*, und sonst, wenn die Risikoaversion fällt, und der Kehrwert von MRS steigt, zunehmend aggressivere Portfolios mit höherem Erwartungswert.

Alle diese Portfolios liegen auf dem Portfoliorand, da *mvp* auf dem Portfoliorand liegt, und Addition von $\mathbf{h}$ (oder einem Vielfachen) aus einem Randportfolio ein anderes Randportfolio macht mit um 1 (oder einem Vielfachen) höheren Erwartungswert (vergleiche Satz 10 auf Seite 60)[21].

Dieses Resultat ist mit einem späteren Resultat im zeitkontinuierlichen CAPM vergleichbar.

Nachdem also durch eine rein mathematische Überlegung am Anfang dieses Kapitels (ohne die Nutzenfunktionen des Investors zu betrachten) der Portfoliorand hergeleitet wurde, bekommt man hier durch explizite Betrachtung der Nutzenfunktion eine Idee, wo auf dem Portfoliorand sich individuelle Investoren aufhalten werden.

---

[21] In der Tat kann man die Formel auch so schreiben:

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{g}} + \left(\mu_{mvp} + \frac{C/D}{MRS_{\mu\sigma^2}(\circ)} \right) \mathbf{h}, \tag{4.102}$$

man sieht also unmittelbar den Erwartungswert des gewählten Portfolios: $\mu_{mvp} + \frac{C/D}{MRS_{\mu\sigma^2}(\circ)}$.

Kapitel 5

Das Sharpe-Lintner-Mossin CAPM

Das im letzten Kapitel untersuchte Zero-Beta-CAPM von Black wurde erst 1972 veröffentlicht [5], da das Konzept des Nullkovarianzportfolios benötigt wird.

Die ursprünglich zuerst untersuchte Variante des CAPM, entwickelt von Sharpe, Lintner und Mossin[1], enthält ein risikoloses Asset, das unbeschränkt gekauft und verkauft werden kann.

5.1 Einführung eines risikolosen Assets

Nun wird untersucht, was *mit* einem risikolosen Asset passiert. Erst wird eine anschauliche Erklärung gegeben, dann wird der Portfoliorand direkt berechnet.

Wenn Investor i einen Anteil α seines Vermögens in das risikolose Asset mit Rendite r_f, und den Rest in ein riskantes Asset mit Rendite $\tilde{r}_q$ investiert, dann ist seine gesamte Rendite

$$\tilde{r}^i = \alpha r_f + (1 - \alpha)\tilde{r}_q, \tag{5.1}$$

[1] Sharpes seminaler Artikel „Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk“ wurde 1964 veröffentlicht [62], enthält kleinere Unklarheiten, und versteckt ein wesentliches Resultat in Fußnote 22. Lintners Modell, veröffentlicht 1965 [36], ist subtil anders, und er behauptete, sein Risikomaß sei anders und genereller als Sharpes, was Sharpe ihm auch zugestand. Fama gab 1968 in einem Artikel [19] einige „clarifying comments“, und zeigte, daß beide Modelle im wesentlichen die gleichen sind. Mossin veröffentlichte 1966 eine sehr formale und präzise Darstellung des Modells (er nennt Sharpes Artikel „verbal-diagrammatical“ und moniert „a lack of precision“), allerdings in heute ungewohnter Notation [47].

und Erwartungswert und Varianz davon sind

$$E[\tilde{r^i}] = \alpha r_f + (1-\alpha)E[\tilde{r}_q] \tag{5.2}$$
$$Var[\tilde{r^i}] = \alpha^2 Var[\tilde{r}_q], \quad \text{also} \quad \sigma_{r^i} = |\alpha|\sigma_{r_q}. \tag{5.3}$$

Die Standardabweichung eines Portfolios aus einem riskanten und einem risikolosen Asset steigt also linear mit dem Anteil des riskanten Assets, ebenso wie der Erwartungswert.

Die Portfolios aus einem riskanten Portfolio q und dem risikolosen r_f liegen also im μ-σ-Raum auf einer Linie von r_f zum Portfolio q, siehe Bild 5.1. Geht man über q hinaus entlang der gestrichelten Linie, so ist man

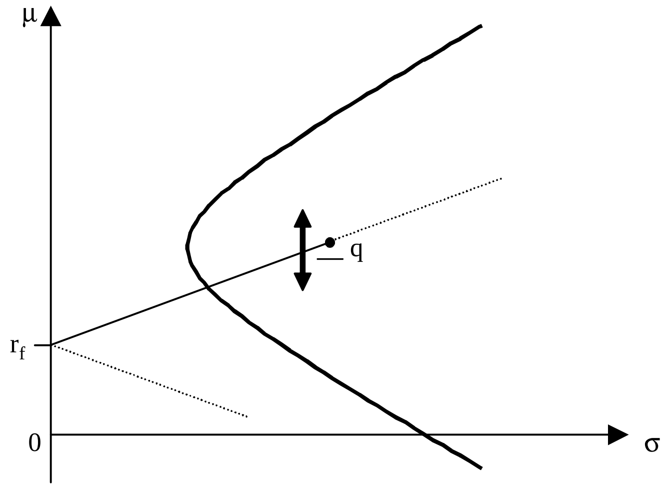

Abbildung 5.1: **Portfolios aus risikolosem und riskantem Asset.**

short im risikolosen Asset (nimmt Kredit auf, um in die riskante Position zu gehen), und $\alpha > 1$. Alternativ könnte man das riskante Portfolio q leerverkaufen, und landet dann in diesem Fall auf der gestrichelten Linie, die von r_f abwärts zeigt ($\alpha < 0$, daher die Betragsstriche in Formel (5.3)).

Man kann das risikolose Asset r_f mit allen zulässigen riskanten Portfolios kombinieren, also allen Portfolios innerhalb (oder auf dem Rand) der Hyperbel im μ-σ-Raum.

Offenbar kann man bessere Portfolios finden, wenn die Linie ins Innere der Hyperbel geht, nämlich die Portfolios darüber. Wenn man die Linie am Punkt r_f festhält und von unten rechts nach oben dreht, bis sie den Portfoliorand tangiert, dann hat man ein Optimum erreicht, und das Tangentialportfolio ist das optimale riskante Portfolio, mit dem man das risikolose Portfolio kombinieren wird.

Definition (Tangentialportfolio). Gegeben den Portfoliorand der riskanten Assets und den risikolosen Zins r_f[2], dann ist das Tangentialportfolio t das Randportfolio (riskanter Assets), in dem die Steigung des Portfoliorandes (also die marginale Rate der Transformation) gleich ist der Steigung der Linie $\overrightarrow{r_f\, t}$.

Nun, mit den Vorarbeiten aus dem letzten Kapitel, kann man sehr einfach das Tangentialportfolio finden, nämlich genauso wie das Nullkovarianzportfolio im letzten Kapitel, vergleiche Bild 4.4 auf Seite 72.

Satz 16. *Gegeben den Portfoliorand der riskanten Assets, ist das Tangentialportfolio für einen risikolosen Zinssatz r_f gerade gleich dem Nullkovarianzportfolio des Randportfolios, dessen Renditenerwartungswert gleich r_f.*

Die Essenz dieses Kapitels läßt sich sehr kurz zusammenfassen: *Linearkombinationen des risikolosen Portfolios r_f und des Tangentialportfolios dominieren* alle *anderen Portfolios (im Sinne der μ-σ-Effizienz), und daher wird jeder Investor mit μ-σ-Präferenzen ein Portfolio auf dieser Linie wählen, sie heißt Kapitalmarktlinie. Jeder Investor wählt also eine Kombination aus risikofreiem Asset r_f und dem Tangentialportfolio t (die sogenannte Zwei-Fonds-Separation).*

Das ist das klassische CAPM. Nun zur formalen Behandlung als Optimierungsproblem.

5.2 Der Portfoliorand mit risikolosem Asset

Sei also ein risikoloses Asset mit Rendite r_f gegeben, und wieder sei zunächst der Portfoliorand untersucht, also die Menge der Portfolios mit minimaler Varianz für einen gegebenen Erwartungswert. Diesmal seien die Portfoliogewichte der *riskanten* Assets durch $\mathbf{y}$ gegeben, und $\mathbf{y}$ sei als reduziertes Portfolio bezeichnet, das nicht normiert sein muß: Denn das Gewicht y_0 des risikofreien Assets sei so gewählt, daß das Gesamtportfolio $(y_0, \mathbf{y})'$ normiert ist:

$$y_0 = 1 - \mathbf{y}'\mathbf{1}. \tag{5.4}$$

Alle Annahmen werden übernommen, nur soll die Kovarianzmatrix das risikolose Asset nicht enthalten (dann wären die entsprechende Zeile und Spalte Null, und $\mathbf{V}_r$ nicht mehr invertierbar). Die so reduzierte Kovarianzmatrix sei wieder invertierbar.

Die Gesamtrendite eines Portfolios ist dann $\mathbf{y}'\tilde{\mathbf{r}} + (1 - \mathbf{y}'\mathbf{1})r_f$, die Varianz gleich der des reduzierten Portfolios, da das risikolose keine Varianz beisteuert. Also ist gegeben:

$J+1$	Zahl der Basiswertpapiere (inklusive risikoloses)
$\boldsymbol{\mu}_r \in \mathbb{R}^J$	Vektor der Erwartungswerte der J stochastischen Renditen

[2] mit $r_f \neq \mu_{mvp}$

$\mathbf{V}_r \in \mathbb{R}^{J\times J}$	Kovarianzmatrix der J stochastischen Renditen
r_f	Rendite des risikolosen Assets

Gesucht:

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^J$	Portfolio riskanter Assets, das (mittels y_0 normiert) minimale Varianz für den gegebenen Erwartungswert μ hat.

Der Portfoliorand ist dann gegeben durch die Lösungen des Optimierungsproblems:

$$\min_{\mathbf{y}} \quad \frac{1}{2} \underset{1\times J}{\mathbf{y}}' \underset{J\times J}{\mathbf{V_r}} \underset{J\times 1}{\mathbf{y}} \tag{5.5}$$

$$\text{udN} \quad \underset{1\times J}{\mathbf{y}}' \underset{J\times 1}{\boldsymbol{\mu}_r} + (1 - \underset{1\times J}{\mathbf{y}}' \underset{J\times 1}{\mathbf{1}})r_f = \mu \tag{5.6}$$

Die Lagrange-Funktion dazu und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ein Minimum sind:

$$L(\mathbf{y}, \lambda) = \frac{1}{2}\mathbf{y}'\mathbf{V}_r\mathbf{y} - \lambda(\mathbf{y}'\boldsymbol{\mu}_r + (1 - \mathbf{y}'\mathbf{1})r_f - \mu) \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{V}_r\mathbf{y} - \lambda(\boldsymbol{\mu}_r - \mathbf{1}r_f) \overset{!}{=} \underset{J\times 1}{\mathbf{0}} \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{y}'\boldsymbol{\mu}_r + (1 - \mathbf{y}'\mathbf{1})r_f - \mu \overset{!}{=} \underset{1\times 1}{0} \tag{5.9}$$

Um dieses Gleichungssystem aufzulösen, multipliziere man (5.8) von links mit dem Inversen $\mathbf{V}_r^{-1}$ der Kovarianzmatrix, das nach Annahme 4.1.3 existiert:

$$\mathbf{y} = \lambda\mathbf{V}_r^{-1}(\boldsymbol{\mu}_r - r_f\mathbf{1}). \tag{5.10}$$

Zur Ermittlung von λ multipliziere man diese Gleichung einmal mit $\mathbf{1}$ und einmal mit $\boldsymbol{\mu}_r$, dabei (5.4) und (4.9) beachtend und mit den Definitionen der Skalare auf Seite 58:

$$\mathbf{1}'\mathbf{y} = 1 - y_0 \quad = \lambda(A - r_fC) \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{\mu}_r'\mathbf{y} = \mu - y_0r_f = \lambda(B - r_fA), \tag{5.12}$$

womit man erhält

$$\lambda = \frac{\mu - r_f}{r_f^2C - 2r_fA + B} = \frac{\mu - r_f}{H} \tag{5.13}$$

$$\text{mit} \quad H := r_f^2C - 2r_fA + B = (\boldsymbol{\mu}_r - r_f\mathbf{1})'\mathbf{V}_r^{-1}(\boldsymbol{\mu}_r - r_f\mathbf{1}). \tag{5.14}$$

Dann ergibt sich schließlich das Portfolio minimaler Varianz mit Renditeerwartungswert μ_p zu

$$\mathbf{y}_p = \frac{\mu_p - r_f}{H}\mathbf{V}_r^{-1}(\boldsymbol{\mu}_r - r_f\mathbf{1}), \tag{5.15}$$

die Varianz ist

$$\sigma_p^2 = \mathbf{y}'\mathbf{V}_r\mathbf{y} \tag{5.16}$$
$$= \frac{\mu_p - r_f}{H}(\boldsymbol{\mu}_r - r_f\mathbf{1})'\mathbf{V}_r^{-1}{}'\mathbf{V}_r\mathbf{V}_r^{-1}(\boldsymbol{\mu}_r - r_f\mathbf{1})\frac{\mu_p - r_f}{H} \tag{5.17}$$
$$= \frac{\mu_p - r_f}{H} \cdot H \cdot \frac{\mu_p - r_f}{H}, \quad \text{also} \tag{5.18}$$
$$\sigma_p^2 = \frac{(\mu_p - r_f)^2}{H}, \tag{5.19}$$

Standardabweichung und Erwartungswert also

$$\sigma_p = \left|\frac{\mu_p - r_f}{\sqrt{H}}\right| \quad \text{und} \quad \mu_p = r_f \pm \sqrt{H}\,\sigma_p. \tag{5.20}$$

Damit entartet der Portfoliorand zu zwei Halbgeraden in der μ-σ-Ebene, die bei einer Standardabweichung von Null einen Erwartungswert von r_f haben, und von dort mit der Steigung $\sqrt{H}$ nach rechts oben und unten gehen.

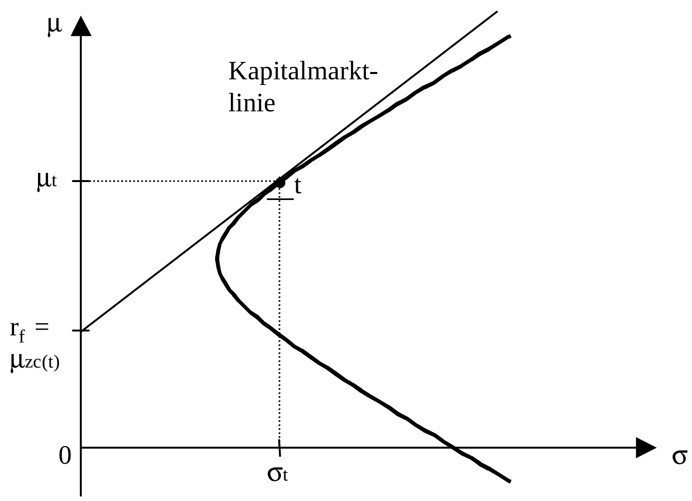

Abbildung 5.2: **Die Kapitalmarktlinie.** *Die effizienten Portfolios liegen auf der Kapitalmarktlinie.*

Die ineffizienten Randportfolios liegen auf der unteren Halbgerade, die effizienten liegen auf der oberen Halbgerade: der Kapitalmarktlinie (siehe Bild 5.2). Alle Investoren mit μ-σ-Präferenz wählen Portfolios auf der Kapitalmarktlinie.

5.3 Marktportfolio und Tangentialportfolio

Das Tangentialportfolio in verschiedenen Lagen

Das Tangentialportfolio t ist läßt sich berechnen aus dem Portfoliorand der riskanten Assets, also $\boldsymbol{\mu}_r$ und $\mathbf{V}_r$, einerseits, und dem risikolosen Zins r_f andererseits. Es ist gleich dem Nullkovarianzportfolio des Randportfolios riskanter Assets, dessen Renditenerwartungswert gleich r_f ist. (Einfacher gesagt: mit $\boldsymbol{\mu}_r$ und $\mathbf{V}_r$ kann man den riskanten Portfoliorand berechnen, dann zieht man einfach Linie von r_f und dreht sie, bis sie den riskanten Portfoliorand tangiert.) Wenn r_f kleiner ist als das μ_{mvp}, dann ist also μ_t größer μ_{mvp} und damit effizient. Dies ist die normale Situation in einem Gleichgewicht, in dem die riskanten Assets in positivem Nettoangebot vorhanden sind.

Wenn r_f größer wäre als das μ_{mvp}, dann wäre also μ_t kleiner μ_{mvp} und damit ineffizient. Dann würde jeder Investor, der effiziente Portfolios halten will, das risikolose Asset kaufen, und das Tangentialportfolio leerverkaufen wollen.[3] Das kann nur eine Gleichgewichtssituation sein, wenn die riskanten Assets in einem negativen Nettoangebot da sind, keine sehr realistische Vorstellung; daher würden bei positivem Nettoangebot der riskanten Assets deren Preise so lange fallen, bis die Rendite des *mvp* größer r_f ist, und damit die erste Situation eintritt.

Ist r_f gleich μ_{mvp}, dann gibt es kein Tangentialportfolio. Der Portfoliorand bestünde dann aus den Asymptoten an den riskanten Portfoliorand, und Investoren investierten alles in das risikolose Asset und hielten in den riskanten Assets Arbitrageportfolios, also Portfolios mit einem Nettoeinsatz von Null.

Das Tangentialportfolio läßt sich also allein aus der Verteilung der stochastischen Assetrenditen bestimmen und der Lage der risikolosen Rendite relativ dazu, ohne Rückgriff auf die Investoren, ihren Nutzen, und ihr Vermögen, oder gar Konzepte wie Gleichgewicht etc.

Eine weitere Charakterisierung: Es ist das Portfolio, das der Portfoliorand der *riskanten* und der Portfoliorand *aller* Assets gemeinsam haben, also das Randportfolio, in dem das risikolose Asset einen Anteil von Null hat.

Das Martportfolio mit riskantem Asset

Das Marktportfolio hingegen beruht auf den Marktwerten der Assets. Wenn in Asset j insgesamt ein Betrag von W_j investiert ist, insgesamt also in alle Assets $W^m := \sum_{j=0}^{J} W_j$ investiert wurde, dann ist das Martportfolio $\hat{\mathbf{y}}^m$ mit $y_j^m := \frac{W_j}{W_m}$.

[3] Er würde also auf der komplett gestrichelten Halbgerade in Bild 5.1 positioniert sein wollen, die nun die obere Halbgerade wäre, weil q auf dem unteren Ast der Hyperbel läge.

Das Marktportfolio enthält alle Assets in dem Anteil, der ihr Wert am Gesamtwert aller Assets ausmacht. Dies kann man entweder berechnen anhand des Vermögens, das die Investoren in die jeweiligen Assets investiert haben, oder (im nächsten Kapitel, wenn die Assets durch Anzahl der Anteile und Preis beschrieben sind), durch das Produkt der beiden Größen: Anzahl der Anteile mal Preis pro Anteil gleich Wert des Assets.

Wenn das risikolose Asset in einem Nettoangebot von Null vorhanden ist, dann ist das Marktportfolio auch das Tangentialportfolio. Ist das risikolose Asset in einem positiven Nettoangebot da, dann liegt das Marktportfolio im μ-σ-Raum und im Assetraum auf einer Linie zwischen risikolosem Asset und Tangentialportfolio, da es eine konvexe Kombination aus beiden ist, deren Gewichte gerade dem Verhältnis der (Netto)Werte des risikolosen Assets und aller riskanten Assets entspricht.

5.4 Fonds-Separation

Fonds-Separation bezeichnet das Ergebnis, daß man einige wenige Portfolios (Fonds) so auswählen kann, daß sich jeder Investor mit einer Kombination dieser wenigen Portfolios zufriedengibt. Damit kann man das Problem der Allokation des Vermögens auf viele riskante Assets reduzieren auf die Wahl zwischen einige wenige Fonds.[4]

Zwei-Fonds-Separation für das CAPM mit risikolosem Asset

Wie bereits gesehen, gilt für das Sharpe-Lintner-Mossin-CAPM, wenn jeder unbeschränkt zum risikolosen Zins anlegen und Kredit aufnehmen kann, die 2-Fond-Separation: Jeder Investor hält eine Kombination aus risikolosem Asset und dem Tangentialportfolio. Der Prozeß der optimalen Portfoliowahl läßt sich also in zwei Schritte aufspalten:

Zunächst findet eine Fondsgesellschaft das Tangentialportfolio und hält es — das kann sie tun, ohne die Risikoeinstellung der Investoren zu kennen, denn das Tangentialportfolio hängt wie gesagt nur den Assets ab, nämlich vom risikolosen Zins einerseits und Erwartungswerten und Kovarianzen der riskanten Assets andererseits (und nach Annahme 4.1.6 haben ja alle die gleichen Erwartungen bezüglich dieser Charakteristika). Dann, im nächsten Schritt, wählt jeder Investor entsprechend seiner Risikopräferenzen die Anteile, in denen er sein Vermögen auf die risikolose Anlagemöglichkeit und den riskanten Fonds aufteilt.

Im Assetraum besteht der effiziente Rand, auf dem sich Investoren bewegen, aus der Halbgeraden, die im Portfolio $(1, 0, \dots, 0)'$ beginnt (das nur das

[4] Insbesondere erlaubt Zwei-Fond-Separation mit einem riskanten Fonds und dem risikolosen Asset die Anwendung der vergleichenden Analyse mittels des Arrow-Prattschen-Risikomaßes, vergleiche die Interpretation in Abschnitt 3.3.3 auf Seite 42.

risikolose Asset enthält), und durch das Tangentialportfolio t immer weiter geht.

Zwei-Fonds-Separation für das CAPM ohne risikoloses Asset

In Blacks Zero-Beta-CAPM ohne risikoloses Asset gilt auch 2-Fond-Separation: Jeder Investor wählt sein optimales Portfolio auf dem riskanten Portfoliorand (der Hyperbel im μ-σ-Raum). Der Portfoliorand ist aber nach Satz 12 aus zwei beliebigen verschiedenen Randportfolios konstruierbar, also können zwei Fonds jeweils ein beliebiges Randportfolio anbieten, das eine etwas konservativer, das andere etwas riskanter, und jeder Investor kann sich durch eine Kombination nur dieser zwei Fonds sein optimales Portfolio entsprechend seiner Risikoeinstellung zusammensuchen.

Im Assetraum besteht der effiziente Rand aus der Halbgeraden, die vom *mvp* in Richtung der effizienten Portfolios geht (also eine Hälfte der in Bild 4.1 auf Seite 61 dargestellten Gerade der Randportfolios).

Drei-Fonds-Separation für das CAPM ohne Kreditaufnahme

Wenn das risikolose Asset nur gekauft werden kann (Anlage), aber nicht leerverkauft werden kann (Kreditaufnahme), dann sieht die Situation etwas anders aus. Der effiziente Rand sieht dann aus wie im Bild 5.3. Wenn ein re-

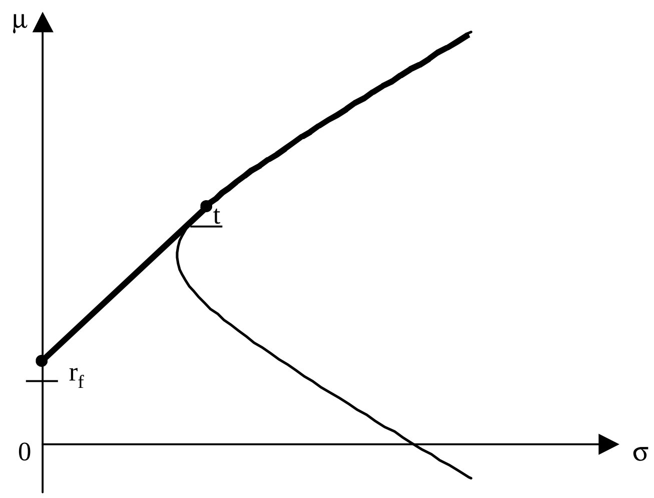

Abbildung 5.3: **Der effiziente Rand ohne Kreditaufnahme.**

lativ risikoaverser Investor in das Tangentialportfolio investiert und den Rest in das risikolose Asset anlegt, dann bewegt er sich auf der Linie zwischen dem risikolosen Asset r_f und dem Tangentialportfolio t. Ein risikofreudigerer Investor möchte sich weiter nach rechts oben bewegen, kann aber das risikolose Asset nicht short gehen (keinen Kredit aufnehmen, um Aktien zu kaufen). Daher kann er sich nur auf der Hyperbel weiterbewegen. Es werden also drei Fonds benötigt: Die risikolose Anlagemöglichkeit, das Tangentialportfolio, und ein weiteres riskantes Randportfolio[5]. In diesem Fall muß das risikolose Asset in positivem Nettoangebot vorhanden sein (wenn man es kaufen, aber nicht leerverkaufen kann), und das Marktportfolio kann auf der Strecke $\overrightarrow{r_f\, t}$ liegen oder weiter rechts auf der Hyperbel.

Im Assetraum besteht der effiziente Rand aus einer Strecke und einer Halbgeraden: Erst vom risikolosen Portfolio $(1, 0, \ldots, 0)'$ zum Tangentialportfolio, und dann von dort entlang der Gerade der riskanten Randportfolios in Richtung höheren Erwartungswertes.

Vier-Fonds-Separation für das CAPM mit unterschiedlichem Zins

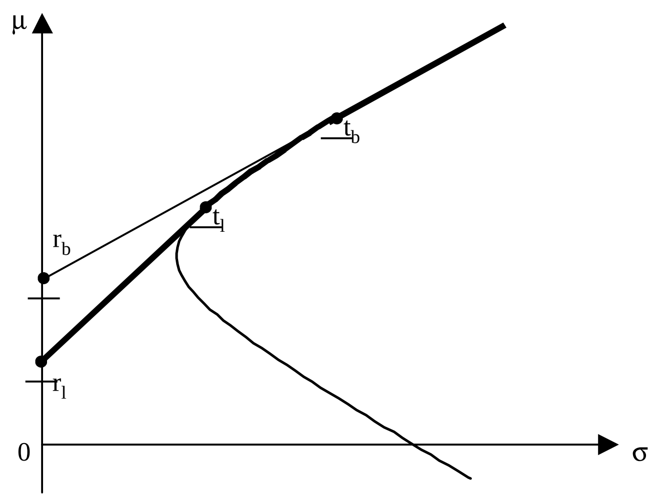

Abbildung 5.4: **Der effiziente Rand mit verschiedenen Zinssätzen.**

Wenn Anlage und Kreditaufnahme zu verschiedenen Zinssätzen möglich sind, dann liegt der effiziente Rand wie in Bild 5.4: Zunächst zwischen risikoloser Anlage r_l und Tangentialportfolio t_l für relativ risikoaverse Investoren, dann auf dem riskanten Rand für etwas risikofreudigere Investoren, und schließlich für Investoren, die Kredit aufnehmen zum höheren Zinssatz r_b, um in riskante Assets anzulegen, entlang der Halbgeraden von t_b nach oben. Man braucht also vier Fonds: r_l (in positivem Nettoangebot), t_l, t_b, und r_b (in negativem Nettoangebot). Das Marktportfolio liegt irgendwo auf dem in Bild 5.4 fett gezeichneten effizienten Rand, je nach Marktwert der verschiedenen Fonds.

[5]Natürlich reichen zwei beliebige Randportfolios auf der riskanten Hyperbel.

5.4.1 Bedingungen für Zwei-Fond-Separation

Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Zwei-Fond-Separation

Man kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Assetrenditen einschränken, um im Erwartungsnutzenparadigma zu Zwei-Fond-Separation für das Portfolioproblem des Investors zu gelangen. Chamberlains Ergebnis von 1983, besprochen auf Seite 47, bestimmt die allgemeinste Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Assetrenditen, unter denen sich der Erwartungsnutzen der Investoren mit beliebigen von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktionen allein als Funktion der ersten beiden Momente ausdrücken läßt: Elliptisch verteilte Zufallsvariablen. Dies impliziert auf jeden Fall Zwei-Fond-Separation.

Chamberlain zeigt, daß die elliptische Verteilung ein Spezialfall eines allgemeineren Resultats von Ross [57] ist. Ross zeigte 1978 die allgemeinste Struktur der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Assetrenditen auf, für die sich Zwei-Fond-Separation einstellt (ohne daß sich notwendigerweise der Nutzen der Investoren nur als Funktion von μ und σ schreiben läßt). Die zufällige Rendite eines Assets ist dann eine lineare Kombination der Renditen der zwei Fonds plus ein Störterm, der einen bedingten Erwartungswert von Null hat.

Für Ross' Familie von zwei-Fonds-separierenden Verteilungen gilt (für finite Varianzen) das CAPM.

Nutzenfunktionen für Zwei-Fond-Separation

Andererseits kann man im Erwartungsnutzenparadigma die von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion des Investors einschränken, um zu Zwei-Fond-Separation zu gelangen. Cass und Stiglitz erreichten das 1970 [10], sie bewiesen, daß ohne risikoloses Asset[6] quadratische Nutzenfunktionen oder Nutzenfunktionen mit konstanter relativer Risikoaversion[7] hinreichend und notwendig für Zwei-Fond-Separation mit beliebig verteilten Assetrenditen sind.

Aber: Diese nutzenbasierte Zwei-Fonds-Separation (außer quadratische Nutzenfunktionen) führt nicht zu μ-σ-Präferenzen und nicht zum CAPM.

5.5 Empirische Testbarkeit und Rolls Kritik

Wie gezeigt, gilt der lineare Zusammenhang

$$E[\tilde{r}_j] = r_f + \beta_{jm}(E[\tilde{r}_m] - r_f) \tag{5.21}$$

mathematisch immer, wenn dieses Portfolio m ein (beliebiges) Randportfolio ist. Die ökonomische Aussage des CAPM ist also, daß das Marktportfolio

[6] Mit risikolosem Asset sieht es nur wenig anders aus.

[7] Also der Form $U_E(W) = \frac{W^{1-A}}{1-A}$ für $A > 0, A \neq 1$ oder, für $A = 1, U_E(W) = \ln(W)$.

ein Randportfolio ist. Wenn alle Investoren Randportfolios halten, ist das ja auch der Fall, weil die Menge der Randportfolios konvex ist.

Das CAPM impliziert damit, daß anderere Faktoren (wie z. B. Firmengröße, Bilanzkennzahlen) keine Rolle spielen, oder, genauer, daß sie alle im β schon berücksichtigt sind.

Ex ante – ex post

Bei der praktischen Überprüfung dieser einfach scheinenden These ergeben sich aber Probleme.

Will man überprüfen, ob die erwarteten Renditen wirklich linear mit der Kovarianz relativ zum Marktportfolio zusammenhängen, dann ist da zunächst mal das Problem, daß man die (ex ante) erwarteten Renditen ja gar nicht kennt, sondern nur die tatsächlich realisierte (ex post) Rendite, die offenbar von den erwarteten Renditen abweichen kann, sonst wäre es kein risikobehafteter Asset.

Um dieses Problem kommt man herum, indem man davon ausgeht, daß es sich um ein faires Spiel handelt, d. h. die Investoren im Schnitt bekommen, was sie erwarten; anders gesagt, der Schnitt der tatsächlich realisierten Renditen der erwarteten Rendite der Investoren entspricht. Damit kann man, wenn man längere Zeitreihen zur Verfügung hat, zumindest probabilistische Aussagen über die Gültigkeit des CAPM machen.

Die Kovarianz der Assets zum Marktportfolio kennt man natürlich auch nicht, und man behilft sich mit der Analyse der historischen Zeitreihen und der Stationaritätsannahme, daß sich die Kovarianz nicht ändern wird im weiteren Verlauf.

Nun, selbst wenn das ex-ante-ex-post-Problem gelöst ist, muß man als nächstes den Zusammenhang von Rendite und *β relativ zum Marktportfolio* testen – aber wie findet man das Marktportfolio? Und hier greift Roll's Kritik an:

Rolls Kritik

Richard Roll, UCLA, behauptete in seinem berühmten Artikel [54] von 1976, daß es zwar *prinzipiell* möglich sei, daß CAPM zu testen, aber *praktisch* unmöglich. Diese umfassende Kritik eines der fundamentalsten Paradigmen des Fachs wurde mit Skepsis und Konsternation aufgenommen, und, wie Roll so schön schreibt,

> „The purpose of this paper is to eliminate the scepticism. (No relief is offered for the consternation.)“

Die praktische Unmöglichkeit eines Tests beruht auf der Unkenntnis des wahren Marktportfolios. Im einzelnen sind die Hauptthesen Rolls diese:

1. Die einzige testbare Hypothese des CAPM ist: Das Marktportfolio ist ein effizientes[8] Portfolio.

2. Alle anderen sogenannten Implikationen des Modells, insbesondere der lineare Zusammenhang zwischen erwarteter Rendite und Beta, sind Folgen der Effizienz des Marktportfolios und nicht unabhängig testbar. Der lineare Zusammenhang und die Effizienz des Marktportfolios sind äquivalent, es besteht ein „dann und nur dann"-Zusammenhang zwischen ihnen.

3. In jeder beliebigen Stichprobe von beobachteten Assetrenditen wird es unabhängig davon, aufgrund welchen stochastischen Prozesses diese Renditen zustandegekommen sind, unendlich viele ex-post effiziente Portfolios geben. Diese lassen sich, gegeben die empirischen Stichprobenmittelverte und Kovarianzen, einfach z. B. nach Formel (4.27) berechnen, indem man einfach überall Erwartungswerte durch empirische Werte ersetzt. Für jedes dieser ex-post Randportfolios wird gelten, daß das empirische Mittel einer Assetrendite und das empirisches Beta des Assets bezüglich des ex-post Randportfolios *exakt* linear zusammenhängen – wie gezeigt, eine rein mathematische Eigenschaft des Portfoliorandes.

   Das heißt, daß der CAPM-Zusammenhang, wenn die Betas relativ zu einem ex-post effizienten Portfolio berechnet werden, exakt gilt – unabhängig davon, ob das Marktportfolio effizient ist.

4. Das bedeutet, daß die Theorie nicht testbar ist, es seid denn, die wahre Zusammensetzung des vollständigen Marktportfolios ist bekannt und wird im Test benutzt – was bedeutet, daß man das CAPM nicht testen kann, ohne *alle* existierenden Assets in die Untersuchung aufzunehmen (inklusive Humankapital etc.)

5. Nimmt man hingegen einen Stellvertreter für das Marktportfolio, ein Proxy, treten zwei Schwierigkeiten auf. Gilt der lineare Zusammenhang, was hat man gewonnen? Man weiß, daß der Stellvertreter des Marktportfolios effizient war, weiß aber nichts über das Marktportfolio selbst. Es gebe (um Rolls Beispiel zu benutzen) 1000 Assets, aber nur 500 davon seien in der Stichprobe betrachtet. Nun kann man ja aus diesen 500 unendlich viele effiziente Portfolios formen, und einige davon werden auch relativ gut mit dem Marktportfolio korrelieren. Sei nun eines davon als Proxy gewählt – und da es effizient ist, gilt sofort der lineare Zusammenhang. Andererseits könnte man ein ex-post-ineffizientes Portfolio als Proxy wählen – aber offenbar hat das wieder

[8] unter einem effizienten Portfolio wird hier, wie früher im Text definiert, ein Portfolio mit maximalem Erwartungswert für gegebene Varianz verstanden, also ein Randportfolio auf dem oberen Ast der Parabel im μ-σ^2-Raum.

wenig mit dem tatsächlichen Markt zu tun. Die meisten vernünftigen Proxies für das Marktportfolio dürften ziemlich hoch korreliert sein sowohl untereinander als auch mit dem tatsächliche Marktportfolio – allein, das sagt nichts über die Effizienz des Marktportfolios aus. Man könnte schließen, daß wegen der hohen Korrelation die genaue Zusammensetzung des Marktportfolios doch uninteressant sei, dem ist aber nicht so:

6. In einer Studie 1972 wiesen Black, Jensen und Scholes [6] das CAPM aufgrund ihrer Daten zurück, und aufgrund ihrer Wahl des Proxys für das Marktportfolio. Nun zeigte Roll aber, daß man aus den von ihnen benutzten Assets ein Portfolio basteln kann, daß mit dem ursprünglich benutzten Marktproxy eine Korrelation von 0,895 hat, also gut auch als Proxy hätte verwendet werden können – aber ex-post effizient war, also *perfekt* mit der CAPM-Gleichung übereinstimmt. Die Betas der Assets relativ zu diesem modifizierten „Proxy" hängen also exakt linear mit den empirischen Renditen zusammen. Daher kann aus ihren Daten, aus denen Black, Jensen und Scholes das CAPM zurückgewiesen haben, auch eine Bestätigung des CAPM einhergehend mit einer Fehlspezifikation des Marktportfolios gelesen werden.

7. Wenn also zwei Forscher nicht in ihrer Definition des Marktportfolios übereinstimmen, dann können sie die gleichen Renditedaten unterschiedlich interpretieren, und somit über das Ergebnis eines empirischen Tests des CAPM verschiedener Meinung sein.

Die Debatte über das CAPM (und seine Testbarkeit) hält bis heute an. So erschien 1996 ein Artikel von Eugen Fama und Kenneth French mit dem Titel „The CAPM is Wanted, Dead or Alive" [21], in dem sie ihre Zurückweisung des CAPMs 1992 [20] gegen Kritik von Kothari, Schanken, Sloan [33] verteidigen.

Zunächst stellen sie fest, daß die wesentliche Implikation des CAPM, nämlich die Effizienz des Marktportfolios, weiter impliziert, daß

1. Beta das einzige Risikomaß ist, das benötigt wird, um erwartete Renditen zu erklären, und

2. Das Renditepremium, das Investoren erwarten, wenn sie höheres Beta-Risiko übernehmen, positiv ist.

Nun haben Studien natürlich einen positiven Zusammenhang zwischen Beta und erwarteter Rendite gezeigt, also Bestätigung für 2 gefunden, aber (und das ist Fama und Frenchs wesentlicher Punkt hier), dies kann nicht als Bestätigung für das CAPM gewertet werden, solange nicht 1 auch nachgewiesen ist.

Der Size-Effekt

Aber es gibt viele Hinweise, daß andere Variablen zur Erklärung der Renditen beitragen, ohne notwendigerweise mit Beta korreliert zu sein. Das war zuerst insbesondere die Größe der Firma. Auf diese Anomalie wurde zuerst 1981 von Reinganum [53] und Banz [1] hingewiesen: Kleinere Firmen erzielen höhere Renditen, als mit dem CAPM vereinbar[9]. Mittlerweile[10] sind aber auch für andere Variablen[11] Einflüsse nachgewiesen, die innerhalb des CAPMs nicht erklärt werden können.

Das ist insofern aber keine Bestätigung des CAPM, als andere Modelle dies ja durchaus auch vorhersagen, z. B. Multi-Faktor-Versionen des hier später besprochenen zeitkontinuierlichen CAPM von Merton oder die Arbitrage-Pricing-Theory von Ross (APT, 1976, [55]), da auch in diesen Theorien die Marktrendite einer der zur Erklärung der Assetrenditen herangezogener Faktor sein kann.

Da also diese anderen Modelle konsistent sind mit Aussage 2, aber außerdem nicht die Aussage 1 machen, die mit der Empirie schwerlich zu vereinbaren ist, kann empirische Evidenz für Aussage 2 nicht als Evidenz für das einfache CAPM herhalten, insbesondere nicht relativ zu anderen Theorien.

Da die zentrale These des CAPM, daß Beta zur Erklärung der Renditen ausreiche, empirisch nicht mehr haltbar ist, schließen Fama und French mit der lakonischen Bemerkung, daß insbesondere angesichts der Multifaktoralternativen ein positives Premium für die Übernahme von Betarisiko das CAPM nicht wiederbeleben könne. Es könnte natürlich eines Tages eine Methode zur Feststellung des wahren Marktportfolios m gefunden werden[12], dies rechtfertige aber nicht die empirische Anwendung des CAPM, die sich ja auf diese schlechten Proxies stützt.[13]

Wie in Kapitel 3 dargestellt, sind die theoretischen Grundlagen des CAPM zweifelhaft, was nie ein Hindernis für die fruchtbare praktische Anwendung war, und das endgültige Urteil über die Übereinstimmung des Modells mit der Empirie[14] scheint immer noch auszustehen.

---

[9] Löffler gibt in seiner Dissertation [39] eine mögliche Erklärung für den Size-Effekt.

[10] „Moreover, in recent years the size effect has been displaced as the prime embarrasment of the CAPM.“ [21]

[11] e.g. earnings/price, cashflow/price, BE/ME, past sales growth, etc.

[12] „It is, of course, possible, that the apparent empirical failures of the CAPM are due to bad proxies for the market portfolio. In other words, the true market is mean-variance-efficient, but the proxies used in empirical tests are not. In this case, revival of the CAPM awaits the coming of m. The true market portfolio will cast aside the average return anomalies of existing test and reveal that β suffices to explain expected return.“

[13] „ Like the redemptive empirical test, valid applications of the CAPM await the coming of m. In our view, the evidence that β does not suffice to explain expected return is compelling. And the average-return anomalies of the CAPM are serious enough to infer that the model is not a sucessful approximation.“

[14] Auf die vielen weiteren Tests soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Kapitel 6

Jarrows CAPM

In diesem Kapitel wird eine Wirtschaft betrachtet, in der Investoren mit μ-σ-Präferenz entscheiden, was sie heute konsumieren, und was sie für morgen investieren, und wie sie es investieren. Dabei gibt es von jedem der Assets nur eine fest vorgegebene Anzahl, und die Frage ist nun, wieviel die Investoren bereit sind, für ein Stück dieser Assets zu bezahlen. Dabei ist die Auszahlung (pro Stück) eines Assets exogen gegeben (genauer: die gemeinsame Verteilung der zufälligen Auszahlungen).

Es wird zunächst das Entscheidungsproblem des *einzelnen* Investors betrachtet, der die Preise als gegeben betrachtet. Daraus ergibt sich die optimale Entscheidung jedes einzelnen Investors: Wieviel konsumiert er heute, und wieviele Anteile welchen Assets kauft er mit dem Rest?

Dann wird über alle Investoren summiert, und es kommen die *Gleichgewichtsbedingungen* hinzu: Für jedes Asset muß Angebot gleich Nachfrage sein: was die Investoren insgesamt von einem Asset wollen, muß dem entsprechen, was von diesem Asset da ist.

Daraus ergeben sich dann die Preise aller Assets, auch des risikolosen.[1] Hier wird dann wirklich deutlich, warum es „Capital Asset *Pricing* Model“ heißt: Allein aus den Nutzenvorstellungen der Investoren und der Anfangsausstattung an Assets (Anzahl, gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Auszahlungen) kann man ihre Preise bestimmen.

6.1 Das Optimierungsproblem des einzelnen Investors

$J+1$	Zahl der Assets, inklusive des einen risikolosen
$\underset{J\times 1}{\tilde{\mathbf{x}}}$	stochastische Auszahlung der J riskanten Assets

[1] Es ergeben sich genaugenommen nur relative Preise. Um tatsächlich einen Zahlenwert festmachen zu können, muß man den Gesamtwert der Assets kennen: den Preis des Marktportfolios (siehe [31, Seite 213]).

Gegeben:

W_0^i	Anfangsvermögen des i-ten Investors
$\mathbf{n}_0^i$	Anfangsausstattung in J riskanten Assets des i-ten Investors
n_{f0}^i	Anfangsausstattung im risikolosen Assets des i-ten Investors
$\underset{J\times J}{\mathbf{V}_x}$	Kovarianzmatrix der Auszahlungen der riskanten Assets
$\underset{J\times 1}{\boldsymbol{\mu}_x}$	Erwartungswertvektor der Auszahlungen der riskanten Assets
$\mathbf{p}$	Preise der J riskanten Assets
p_f	Preis des risikolosen Assets mit Auszahlung 1

Gesucht:

$C^i(0)$	Konsum heute
$\mathbf{n}^i$	Investitionsportfolio: Stück der J riskanten Assets
n_f^i	Stück des risikolosen Assets

Der einzelne Investor ist nach Annahme Preisnehmer, daher ist für ihn der Preis der Assets gegeben. Gegeben die Preise und seine Anfangsausstattung, sowie die Charakteristika der stochastischen Auszahlungen der Assets, sucht er erstens den heutigen Konsum und zweitens das Investitionsportfolio, was seinen Nutzen über heutigen und morgigen Konsum maximiert.

Konsum morgen

Morgen sind die einzigen Einkünfte des Investors die Auszahlungen aus seinen Investitionen heute, und er verwendet sie vollständig für seinen Konsum. Also ist der Konsum morgen gegeben durch die Auszahlung des risikofreien Assets $n_f^i \cdot 1$ (Anzahl mal Auszahlung pro Stück) und die Auszahlung des Portfolios riskanter Assets, die nach Tabelle 2.1.3 gegeben ist durch $\mathbf{n}^{i\,\prime}\mathbf{x}$, also

$$\tilde{C}^i(1) = \mathbf{n}^{i\,\prime}\mathbf{x} + n_f^i \tag{6.1}$$

Erwartungswert und Varianz davon sind:

$$E[C^i(1)] = \mathbf{n}^{i\,\prime}\boldsymbol{\mu}_x + n_f^i \tag{6.2}$$

$$Var[C^i(1)] = \mathbf{n}^{i\,\prime}\mathbf{V}_x\mathbf{n}^i \tag{6.3}$$

Die Budgetgleichung

Was der Investor heute konsumiert und in Assets steckt (nämlich Anzahl der Anteile mal Preis pro Anteil),

$$C^i(0) + \mathbf{n}^{i\,\prime}\mathbf{p} + n_f^i \cdot p_f, \tag{6.4}$$

muß durch sein Anfangsvermögen und seine Anfangsausstattung an Assets, wenn er sie zum gleichen Marktpreis verkauft, gedeckt sein:[2]

$$\ldots \stackrel{!}{=} W_0^i + \mathbf{n}_0^i{}'\mathbf{p} + n_{f0}^i \cdot p_f. \tag{6.5}$$

Das ist die Budgetgleichung: Konsum und Investition heute = Anfangsvermögen (aus Cash und Verkauf von Assets).

6.1.1 Formulierung des Optimierungsproblem

Also läßt sich das Optimierungsproblem so schreiben, da der Nutzen des Investors vom heutigen Konsum und Erwartungswert und Varianz des morgigen Konsums abhängt:

$$\max_{\substack{C^i(0),\ \mathbf{n}^i,\ n_f^i \\ 1\times 1 \quad J\times 1\ 1\times 1}} \quad U\big(C^i(0), E[\tilde{C}^i(1)], Var[\tilde{C}^i(1)]\big) \tag{6.6}$$

$$\text{udN.} \quad \tilde{C}^i(1) = \mathbf{n}^i{}'\tilde{\mathbf{x}} + n_f^i \tag{6.7}$$

$$C^i(0) + \mathbf{n}^i{}'\mathbf{p} + n_f^i \cdot p_f = W_0^i + \mathbf{n}_0^i{}'\mathbf{p} + n_{f0}^i \cdot p_f. \tag{6.8}$$

Wenn man nun noch Erwartungswert und Varianz aus (6.2) und den morgigen Konsum $C^i(1)$ einsetzt, so daß die erste Nebenbedingung wegfällt, dann ist die endgültige Formuliertung so:

$$\max_{C^i(0),\mathbf{n}^i,n_f^i} \quad U\big(C^i(0), \mathbf{n}^i{}'\boldsymbol{\mu}_x + n_f^i, \mathbf{n}^i{}'\mathbf{V}_x\mathbf{n}^i\big) \tag{6.9}$$

$$\text{udN.} \quad C^i(0) + \mathbf{n}^i{}'\mathbf{p} + n_f^i \cdot p_f = W_0^i + \mathbf{n}_0^i{}'\mathbf{p} + n_{f0}^i \cdot p_f. \tag{6.10}$$

Abkürzung: Die Parameter der Nutzenfunktion seien zur Abkürzung als $(\circ) := \big(C^i(0), \mathbf{n}^i{}'\boldsymbol{\mu}_x + n_f^i, \mathbf{n}^i{}'\mathbf{V}_x\mathbf{n}^i\big)$ geschrieben.

Damit ist dann ist die Lagrangefunktion und die partiellen Ableitungen:

$$L(C^i(0), \mathbf{n}^i, n_f^i) = U(\circ) + \lambda\big(C^i(0) - W_0^i + (\mathbf{n}^i - \mathbf{n}_0^i)'\mathbf{p} + (n_f^i - n_{f0}^i) \cdot p_f\big) \tag{6.11}$$

[2]Anmerkung: Hier wird so modelliert, daß in einem Zeitpunkt (heute) das Portfolio verändert wird und konsumiert wird, dann in einer Zeitspanne sich die Assetpreise stochastisch ändern, und im nächsten Zeitpunkt wieder das Portfolio verändert wird (es wird aufgelöst) und konsumiert wird. Im zeitkontinuierlichen Fall wird so modelliert, daß in einem Zeitpunkt das Portfolio verändert wird, dann ändern sich in einer Zeitspanne die Preise, und gleichzeitig wird konsumiert, und im nächsten Zeitpunkt wird wieder das Portfolio angepaßt.

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}^i} \underset{J\times 1}{=} \frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \mu}\boldsymbol{\mu}_x + \frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \sigma^2}\mathbf{V}_x\mathbf{n}^i - \lambda\mathbf{p} \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_f^i} \underset{1\times 1}{=} \frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \mu} - \lambda p_f \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial C(0)} \underset{1\times 1}{=} \frac{\partial U^i(\circ)}{\partial C(0)} - \lambda \tag{6.14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \underset{1\times 1}{=} C^i(0) - W_0^i + (\mathbf{n}^i - \mathbf{n}_0^i)'\mathbf{p} + (n_f^i - n_{f0}^i)p_f \tag{6.15}$$

Nullsetzen und Elimination von λ aus den mittleren beiden Gleichungen ergibt diese notwendigen Bedingungen für ein Maximum:

$$\text{(Risiko)} \qquad \frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \mu}\boldsymbol{\mu}_x + \frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \sigma^2}\mathbf{V}_x\mathbf{n}^i - \lambda\mathbf{p} \overset{!}{=} \mathbf{0} \tag{6.16}$$

$$\text{(Zeit)} \qquad \frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \mu} - p_f\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial C(0)} \overset{!}{=} 0 \tag{6.17}$$

$$\text{(Budget)} \qquad C^i(0) - W_0^i + (\mathbf{n}^i - \mathbf{n}_0^i)'\mathbf{p} + (n_f^i - n_{f0}^i)p_f \overset{!}{=} 0, \tag{6.18}$$

Zur Interpretation: Die erste Zeile sagt im wesentlichen, daß für jedes Asset j der marginale Nutzen aus einer um eins höheren Investition, finanziert durch Kreditaufnahme zum risikolosen Zins, gleich Null ist. Man wägt also im wesentlichen die (im Vergleich zum risikolosen Zins hoffentlich höhere) Rendite gegen den negativen Nutzen des Risikos ab, daher seien diese J Gleichungen „Risiko“ benannt. Die zweite Zeile sagt aus, daß der marginale Nutzengewinn einer erwarteten Einheit mehr morgen gleich dem marginalen Nutzenverlust einer Einheit weniger heute ist, es wird also der Zeitfaktor abgewogen. Die dritte Zeile ist wiederum die Budgetbeschränkung. Insgesamt sind es $J+1+1$ Gleichungen für die $J+1+1$ Unbekannten $\mathbf{n}^i, n_f^i, C^i(0)$.

Wenn Investoren eine Einheit des Konsumgutes heute einer erwarteten Einheit morgen vorziehen, sollte man erwarten, daß der marginale Nutzen ersterer größer ist, also der folgende aus der Zeitgleichung berechnete Quotient kleiner eins ist:

$$\frac{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \mu}}{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial C(0)}} = p_f = \frac{1}{1+r_f}. \tag{6.19}$$

6.1.2 Die Nachfrage nach Assets

Die Nachfrage nach riskanten Assets

Aus der Risikogleichung (6.16) kann man einen Ausdruck für die Nachfrage $\mathbf{n}^i$ des Investors i nach riskanten Assets berechnen:

$$\mathbf{n}^i = \frac{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial C(0)}}{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \sigma^2}} \mathbf{V}_x^{-1}\mathbf{p} - \frac{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \mu}}{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \sigma^2}} \mathbf{V}_x^{-1}\boldsymbol{\mu}_x \tag{6.20}$$

$$= \mathbf{V}_x^{-1}\left(\frac{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial C(0)}}{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \mu}} \frac{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \mu}}{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \sigma^2}} - \frac{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \mu}}{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \sigma^2}} \boldsymbol{\mu}_x\right) \tag{6.21}$$

$$= \frac{1}{MRS^i(\circ)} \mathbf{V}_x^{-1}\big(\boldsymbol{\mu}_x - (1+r_f)\mathbf{p}\big), \tag{6.22}$$

wobei

$$MRS^i(\circ) = \frac{-\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \sigma^2}}{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \mu}} > 0 \tag{6.23}$$

die marginale Rate der Substition zwischen Erwartungswert und Varianz für den Investor ist, also die Steigung der Indifferenzkurve im μ-σ^2-Raum, und ein Maß für die Risikoaversion: Je höher MRS^i, desto mehr Kompensation durch erwartete Rendite verlangt der Investor, um eine höhere Varianz in Kauf zu nehmen.[3] Die Auswirkungen auf die Nachfrage sieht man hier: Je höher MRS^i, desto weniger riskante Assets kauft der Investor, und desto mehr legt er entsprechend in das risikolose an.

Diese MRS^i ist natürlich von $\mathbf{n}^i$ abhängig, daher hat man damit keinen geschlossenen Ausdruck für die Nachfrage. Aber es läßt sich schon aussagen, daß jedes Investors riskantes Portfolio ein positves Vielfaches eines bestimmten Portfolios ist. In Gleichung (6.22) ist ja *nur* MRS_i von i abhängig. Anders gesagt:

Satz 17 (Riskantes Portfolio). *Alle Investoren halten im Gleichgewicht das* gleiche *riskante Portfolio* $\mathbf{V}_x^{-1}\big(\boldsymbol{\mu}_x-(1+r_f)\mathbf{p}\big)$*, nur in unterschiedlichem Maße.*

Da jedes riskante Asset in positivem Gesamtangebot vorhanden ist, läßt sich außerdem sagen, daß jeder Investor jedes riskante Asset in positiver Anzahl hält. (Wenn einer es in negativer Zahl hält, müssen alle es in negativer Zahl halten, da die Portfolios positive Vielfache sind, und dann kann es nicht zum Gleichgewicht mit dem positiven Angebot kommen.).

Zur Abkürzung $\circ$ für die Parameter der Mutzenfunktion siehe Seite 103.

[3] Siehe Definition auf Seite 38 oder Bild auf Seite 85.

Die Nachfrage nach dem risikolosen Asset

Nun kann man aus der Budgetgleichung, gegeben $\mathbf{n}^i$ und in Abhängigkeit vom Konsum $C^i(0)$, die notwendige Kreditaufnahme berechnen (Verkauf des risikolosen Assets), oder Anlage (Kauf des risikolosen Assets). Danach hält Investor i das risikolose Asset in dieser Zahl:

$$n_f^i = \frac{W_0^i - C^i(0) + (\mathbf{n}_0^i - \mathbf{n}^i)'\mathbf{p}}{p_f} - n_{f0}^i. \tag{6.24}$$

Die Risikogleichung liefert den Ausdruck für $\mathbf{n}^i$, die Budgetgleichung liefert dann – abhängig vom heutigen Konsum – die notwendige Kreditaufnahme. Nun muß der Investor den heutigen Konsum so wählen, daß auch die Zeitgleichung (6.17) erfüllt ist. Mit zunehmendem Konsum heute wird der Grenznutzen $\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial C(0)}$ immer kleiner, gleichzeitig wird bei konstantem $\mathbf{n}$ n_f kleiner, er muß Kredit aufnehmen, das risikolose Asset also verkaufen, und so wird der erwartete Konsum morgen kleiner, und dessen Grenznutzen $\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \mu}$ größer. Der Quotient der beiden hängt also vom Konsum heute ab, und soll gleich dem Preis des risikolosen Assets sein:

$$C^i(0) \nearrow \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U^i(\circ)}{\partial C(0)} \searrow \quad \frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \mu} \nearrow \tag{6.25}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial \mu}}{\frac{\partial U^i(\circ)}{\partial C(0)}} \nearrow \quad \stackrel{!}{=} p_f \tag{6.26}$$

Damit ist jetzt in einem Gleichungsystem mit $J + 1 + 1$ Gleichungen (Risiko, Zeit, Budget) das Entscheidungsproblem des Investors (Konsum heute, Investition in riskante Assets, in risikoloses Asset) gefaßt, mit den Preisen $\mathbf{p}$ und p_f exogen.

6.2 Gleichgewicht

Nun werden alle Investoren zusammen betrachtet. Wenn jeder für die gegebenen Preise sein Optimum gefunden hat, und die Preise so sind, daß gleichzeitig Markträumung herrscht, also Angebot und Nachfrage übereinstimmen, dann herrscht Gleichgewicht:

Definition (Gleichgewicht auf dem Assetmarkt). Ein Assetmarktgleichgewicht liegt vor, wenn

- jeder einzelne Investor an seinem Nutzenoptimum ist, also die $J+1+1$ Gleichungen Risiko (6.16), Zeit (6.17), und Budget (6.18) für alle Investoren $i = 1, \ldots, I$ gelten und

- Für jedes Asset gilt, daß Gesamtangebot und -nachfrage übereinstimmen, also

$$\sum_{i=1}^{I} \mathbf{n}^i \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^{I} \mathbf{n}_0^i \tag{6.27}$$

$$\sum_{i=1}^{I} n_f^i \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^{I} n_{f0}^i \tag{6.28}$$

Mit den vorher besprochenen Gleichungen kann man in Abhängigkeit von den Preisen die Nachfrage der Investoren bestimmen, und mit diesen neuen $J+1$ Gleichungen kann man die $J+1$ Preise so bestimmen, daß Gleichgewicht herrscht. Hier ist das Gleichgewicht nur auf dem Assetmarkt angenommen, aber nach Walras Gesetz wird dann auch auf dem Konsumgütermarkt Gleichgewicht herrschen, d. h. der Gesamtkonsum heute entspricht der gesamten Anfangsausstattung, und der Gesamtkonsum morgen entspricht der gesamten stochastischen Auszahlung der Assets.

6.2.1 Die Preise der riskanten Assets

Nach Gleichung (6.22) hat man die Nachfrage der Investors i nach riskanten Assets gegeben, und Summation über alle Investoren ergibt:

$$\sum_{i=1}^{I} \mathbf{n}^i = \sum_{i=1}^{I} \left(\frac{\mathbf{V}_x^{-1}}{MRS^i(\circ)} \left(\boldsymbol{\mu}_x - (1+r_f)\mathbf{p} \right) \right), \tag{6.29}$$

Die linke Seite ist die Gesamtnachfrage und im Gleichgewicht bekannt, nämlich gleich dem gegebenen Gesamtangebot, also

$$\sum_{i=1}^{I} \mathbf{n}^i = \sum_{i=1}^{I} \mathbf{n}_0^i =: \mathbf{n}^I. \tag{6.30}$$

wobei das Superskript I Summation über alle Individuen andeutet. $\mathbf{n}^I$ ist das Gesamtangebot an riskanten Assets (ein Vektor, der heute und morgen gleich ist). Definiert man nun noch eine Art Gesamtrisikokoeffizient, so daß

Definition.

$$\frac{1}{MRS_I} := \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{MRS_i},$$

dann kann man gleich nach den Preisen auflösen und erhält:

Satz 18 (Preise der riskanten Assets). *Im Gleichgewicht sind die Preise der riskanten Assets*

$$\boxed{\mathbf{p} = p_f(\boldsymbol{\mu}_x - MRS_I\,\mathbf{V}_x\mathbf{n}^I)} \tag{6.31}$$

oder mit $\tilde{x}_r^I := \tilde{\mathbf{x}}'\mathbf{n}^I$ *gleich der Gesamtauszahlung der riskanten Assets:*

$$p_j = \frac{E[\tilde{x}_j] - MRS_I \, cov[\tilde{x}_j, \tilde{x}_r^I]}{1 + r_f} \tag{6.32}$$

Hier hat man nun die Preise der riskanten Assets als diskontierten Erwartungswert $p_f \boldsymbol{\mu}_x$ der Auszahlungen abzüglich eines Risikoabschlages, der sich zusammensetzt aus einem gemeinsamen Risikoaversionsmaß der gesamten Investoren MRS_I und der Kovarianz der Auszahlung des Assets zur Gesamtauszahlung der riskanten Assets.

Hier sieht man besonders deutlich, warum es Capital Asset Pricing Model heißt: Unter der Annahme des Gleichgewichts und der μ-σ-Präferenz aller Investoren gewinnt man unmittelbar einen Ausdruck für den Preis der „Capital Assets“.

6.2.2 Der risikolose Zins

Allerdings fehlt noch etwas: Zwar sind in der Formel oben fast alle Werte exogen gegeben (Erwartungswertvektor und Kovarianzmatrix, Anfangsausstattung), aber nicht der risikolose Zins. Dazu wird die letzte unbenutzte Gleichung (6.28) schließlich eingesetzt, die Gleichgewichtsbedinung für das risikolose Asset. Es muß gelten, daß die Gesamtnachfrage danach gleich dem Gesamtangebot ist[4].

Als Steuerungsvariable steht natürlich der Preis des risikolosen Assets zur Verfügung. Wie oben in (6.25) für den individuellen Investor besprochen: Wenn er heute mehr konsumiert, also weniger in das riskante Asset anlegt, dann geht sein marginaler Nutzen heutigen Konsums zurück, seine erwartete Auszahlung morgen auch, daher steigt der marginale Nutzen morgigen Konsums, und der Quotient der beiden, der im Optimum gleich p_f sein muß, steigt auch. Umgekehrt, wenn der Preis des riskanten Assets steigt, fragt der Investor es weniger nach. Das gilt für alle Investoren, und daher ist mit dieser Gleichung[5]

$$\sum_{i=1}^{I} n_f^i(p_f) \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^{I} n_{f0}^i = n_f^I \tag{6.33}$$

der Preis des risikolosen Assets implizit bestimmt. Damit sind alle endogenen Variablen bestimmt.

[4] Das kann Null sein, wenn das risikolose Asset ein rein finanzielles ist.

[5] $n_f^i(pf)$ bedeutet hier: Die Nachfrage des Investors i nach dem risikolosen Asset *als Funktion seines Preises.*

Tabelle 6.1: Variablen und Gleichungen im Gleichgewichts-CAPM

	Exogene Var.		Endogene Var.		Gleichungen		
		Dim.		Dim.			Dim.
	$\mathbf{V}_x$	$J \times J$					
	$\boldsymbol{\mu}_x$	J					
	$\mathbf{p}$	J					
	p_f	1					
ein	$\mathbf{n}_0^i$	J	$\mathbf{n}^i$	J	Risiko	(6.16)	J
Investor	n_{f0}^i	1	n_f^i	1	Budget	(6.18)	1
	W_0^i	1	$C^i(0)$	1	Zeit	(6.17)	1
			$\tilde{C}^i(1)$	1		(6.1)	1
			$\mathbf{p}$	J	Gleich-	(6.27)	J
			p_f	1	gewicht	(6.28)	1
alle	$\mathbf{n}_0$	$J \times I$	$\mathbf{n}$	$J \times I$	Risiko	(6.16)	$J \times I$
Invest-	n_{f0}	I	n_f	I	Budget	(6.18)	I
oren	W_0	I	$C(0)$	I	Zeit	(6.17)	I
			$\tilde{C}(1)$	I		(6.1)	I

Die Charakteristika der Assetrenditen in der ersten Zeile sind immer exogen gegeben.
Betrachtet man das Optimierungsproblem des einzelnen Investors, dann sind für ihn auch die Preise exogen gegeben, und er wählt mittels Zeit-, Risiko-, und Budgetgleichungen $J+1+1$ endogene Variablen (Konsum heute und Investition in $J+1$ Assets), und Konsum morgen $\tilde{C}^i(1)$ ist damit auch bestimmt.
Betrachtet man das Gleichgewicht für alle Investoren, so gibt es das obige Problem I mal, nämlich für jeden Investor, und dazu $J+1$ weitere Gleichungen (die Gleichgewichtsbedingungen), durch die sich die $J+1$ Preise endogen bestimmenlassen.

6.3 Der lineare Zusammenhang zwischen Rendite und Kovarianz

Der Gesamtwert aller riskanten Assets

Allerdings kann man die Ergebnisse noch etwas anders schreiben: Multipliziert man den Vektor aller Preise mit dem Gesamtangebot riskanter Assets, dann erhält man den Gesamtwert der riskanten Assets, W_r^I:

$$W_r^I := \mathbf{n}^{I\prime}\mathbf{p} = p_f(\mathbf{n}^{I\prime}\boldsymbol{\mu}_x - MRS_I\,\mathbf{n}^{I\prime}\mathbf{V}_x\mathbf{n}^I) \tag{6.34}$$

$$= p_f(E[\tilde{x}_r^I] - MRS_I Var[\tilde{x}_r^I]). \tag{6.35}$$

Satz 19 (Der Gesamtwert aller riskanten Assets). *Die Investoren schreiben den riskanten Assets insgesamt folgenden Wert zu:*

$$W_r^I = p_f(E[\tilde{x}_r^I] - MRS_I Var[\tilde{x}_r^I]). \tag{6.36}$$

Der Gesamtwert aller riskanten Assets ist also gleich dem abgezinsten Erwartungswert der gesamten riskanten Auszahlungen abzüglich ihrer Varianz, die mit einem gewichteten Risikomaß aller Investoren gewichtet ist.

Die Preise der riskanten Assets

Daraus kann man umgekehrt einen Ausdruck für das gewichtete Risikomaß MRS_I finden und ihn in die Gleichung für die Preise einsetzen:

$$MRS_I = \frac{\mathbf{n}^I \left(\boldsymbol{\mu}_x - \frac{1}{p_f}\,\mathbf{p}\right)}{\mathbf{n}^{I\,\prime}\mathbf{V}_x\mathbf{n}^I} = \frac{E[\tilde{x}_r^I] - (1+r_f)W_r^I}{Var[\tilde{x}_r^I]}, \tag{6.37}$$

und damit

$$\mathbf{p} = p_f\left(\boldsymbol{\mu}_x - \frac{E[\tilde{x}_r^I] - (1+r_f)W_r^I}{Var[\tilde{x}_r^I]}\mathbf{V}_x\mathbf{n}^I\right) \tag{6.38}$$

wobei I wieder Summation über alle Investoren andeutet, und das tiefgestellte r die riskanten Assets, und $\tilde{x}_r^I$ die Gesamtauszahlung aller riskanten Assets ist.

Daraus kann man schließlich unter Beachtung der Linearität des Kovarianzoperators einen weiteren Ausdruck für den Preis eines einzelnen Assets ableiten:

$$\boxed{p_j := \frac{E[\tilde{x}_j] - \frac{E[\tilde{r}_r]-r_f}{Var[\tilde{r}_r]}\,cov[\tilde{x}_j, \tilde{r}_r]}{1+r_f}} \tag{6.39}$$

wobei der Bruch im Zähler für alle Assets gleich ist, und einen marktübergreifenden Preis des Risikos darstellt. Wie gesehen, ergibt er sich aus den Nutzenfunktionen der Investoren im Gleichgewicht.

Die Renditen der riskanten Assets

Dies kann man umformen:

$$1 + r_f = \frac{E[\tilde{x}_j] - \frac{E[\tilde{r}_r]-r_f}{Var[\tilde{r}_r]}\,cov[\tilde{x}_j, \tilde{r}_r]}{p_j} \tag{6.40}$$

$$= E[\tilde{r}_j] + 1 - \frac{E[\tilde{r}_r] - r_f}{Var[\tilde{r}_r]}\,cov[\tilde{r}_j, \tilde{r}_r] \tag{6.41}$$

$$\Rightarrow \quad E[\tilde{r}_j] = r_f + \frac{cov[\tilde{r}_j, \tilde{r}_r]}{Var[\tilde{r}_r]}\left(E[\tilde{r}_r] - r_f\right) \tag{6.42}$$

Und wieder hat man die CAPM-Formel — fast. Denn hier wird die Formel ja relativ nur zu den riskanten Assets betrachtet, es wird die Rendite $\tilde{r}_r$ der riskanten Assets, nicht des Marktes betrachtet. Das wird im folgenden Abschnitt getan.

6.4 Das Verhältnis von Tangential- und Marktportfolio

Nun sind ja bisher nur die Preise der und Nachfrage nach den riskanten Assets ermittelt worden. Das Marktportfolio besteht aber aus allen Assets, man muß also das risikolose dazu nehmen. Gesamtangebot der riskanten und risikolosen Assets ist:

$$\mathbf{n}^I = \sum_{i=1}^{I} \mathbf{n}^i = \sum_{i=1}^{I} \mathbf{n}_0^i \tag{6.43}$$

$$n_f^I = \sum_{i=1}^{I} n_f^i = \sum_{i=1}^{I} n_{f0}^i \tag{6.44}$$

In der letzten Zeile steht wohlgemerkt das Nettoangebot des risikolosen Assets. Der Wert der riskanten Assets, des risikolosen, und des gesamten Marktes ist dann respektive:

$$W_r^I = \mathbf{p}'\mathbf{n}^I \qquad\qquad W_f^I = p_f \cdot n_f^I \tag{6.45}$$

$$W_m^I = \mathbf{p}'\mathbf{n}^I + p_f \cdot n_f^I \tag{6.46}$$

Die Auszahlungen morgen aus allen riskanten Assets, aus dem risikolosen, und auf dem gesamten Markt sind dann:

$$\tilde{x}_r^I := \tilde{\mathbf{x}}'\mathbf{n}^I \tag{6.47}$$

$$x_f^I := 1 \cdot n_f^I \tag{6.48}$$

$$\tilde{x}_m^I = \tilde{\mathbf{x}}'\mathbf{n}^I + n_f^I = \sum_{i=1}^{I} \left(\tilde{\mathbf{x}}'\mathbf{n}^i + n_f^i\right) \tag{6.49}$$

Die Rendite aller riskanter Assets, des risikolosen, und die Marktrendite ist dann:

$$\tilde{r}_r = \frac{\tilde{x}_r^I - W_r^I}{W_r^I} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}'\mathbf{n}^I}{\mathbf{p}'\mathbf{n}^I} - 1 \tag{6.50}$$

$$r_f = \frac{x_f^t - W_f}{W_f} = \frac{n_f^t - p_f n_f^t}{p_f n_f^t} = \frac{1}{p_f} - 1 = r_f \tag{6.51}$$

$$\tilde{r}_m = \frac{\tilde{x}_r^I + x_f^I - W_r^I - W_f^I}{W_r^I + W_f^I} \tag{6.52}$$

Jetzt sei der Anteil w_r des Gesamtvermögens betrachtet, der in riskante Assets, und der Anteil w_f, der in das risikolose Asset investiert ist:

$$w_r = \frac{W_r^I}{W_m^I} = \frac{\mathbf{p}'\mathbf{n}^I}{\mathbf{p}'\mathbf{n}^I + p_f n_f^I} \tag{6.53}$$

$$w_f = \frac{W_f^I}{W_m^I} = \frac{p_f n_f^I}{\mathbf{p}'\mathbf{n}^I + p_f n_f^I} = 1 - w_r \tag{6.54}$$

Damit ist die Marktrendite dann

$$\tilde{r}_m = w_r \cdot \tilde{r}_r + w_f \cdot \tilde{r}_f, \tag{6.55}$$

nämlich die mit dem Marktanteil gewichtete Kombination aus riskanter Rendite und risikoloser Rendite.

Nettoangebot der risikolosen Assets von Null

Wenn nun das Nettoangebot der risikolosen Assets 0 ist, dann ist n_f^I nach Gleichung (6.43) gerade 0, und damit auch W_f^I, und damit kollabiert diese aggregierte Darstellung derart, daß die Werte für den Gesamtmarkt m gleich denen für den Markt der riskanten Assets sind. Insgesamt aggregiert wird also, wenn das risikolose Asset im Nettoangebotes von Null vorhanden ist, *genau die Auszahlung der riskanten Assets gehandelt und konsumiert.*

Der lineare Zusammenhang von Rendite und Kovarianz

Kombiniert man die Formel für die Marktrendite (6.55) mit der CAPM-ähnlichen Formel für die riskanten Assets (6.40), dann bekommt man schließlich wieder folgenden Satz:

Satz 20 (CAPM: Erwartete Rendite von Assets). *Unter den gegebenen Voraussetzungen ist die erwartete Rendite eines Assets j gerade*

$$\boxed{E[\tilde{r}_j] = r_f + \frac{cov[\tilde{r}_j, \tilde{r}_m]}{Var[\tilde{r}_m]} \big(E[\tilde{r}_m] - r_f\big).} \tag{6.56}$$

Die erwartete Rendite eines Assets j hängt linear zusammen mit dem Marktbeta $\beta_{jm} = \frac{cov[\tilde{r}_j, \tilde{r}_m]}{Var[\tilde{r}_m]}$; ein Asset, das nicht mit dem Markt korreliert ist, bringt die risikolose Verzinsung, je stärker die Korrelation mit dem Markt, desto höher die verlangte Kompensation.

Kapitel 7

Mertons zeitkontinuierliches CAPM

Merton beschrieb das zeitkontinuierliche CAPM zuerst 1973. Es führt (unter bestimmten Bedingungen) zu verblüffend ähnlichen Ergebnissen wie das oben behandelte einfache CAPM mit zwei Zeitpunkten, nämlich wenn die Assetpreise lognormalverteilt sind und die Parameter sich im Verlauf der Zeit nicht ändern.

Derart lognormalverteilte Assetpreise[1] haben den Vorteil, daß sie nicht negativ werden, also mit beschränkter Haftung sind. Außerdem ist dann nicht nötig, daß die Investoren μ-σ-Präferenz aufweisen, sondern generelle von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktionen[2]. Auch mehrere Konsumgüter und Transaktionskosten [46, Abschnitt 6] lassen sich mit dem Modell erfassen, sowie durch Einführung von Poisson-Prozessen[3] auch Bonds, die einem Zahlungsrisiko unterliegen, das unten beschriebene Portfolioproblem für einen ungewissen Planungshorizont.

Verblüffenderweise macht also der Übergang zum realitätsnäheren, aber komplexeren Modell des dynamischen zeitkontinuierlichen Handels die alten Ergebnisse plausibler, indem er sie auf weniger realitätsferne Annahmen stellt.

Vorgehen

Wie im einperiodigen CAPM wird zunächst das Entscheidungsproblem des einzelnen Investors betrachtet: Was konsumiere ich jetzt, wie lege ich den Rest an?

---

[1](wie im Black-Scholes-Modell für Optionsbewertung)

[2]Zwar müssen sie in der hier entwickelten Version zeitadditiv und separabel sein, aber Merton zeigt, daß auch allgemeinere Präferenzen mit dem Modell konsistent sind [46, Abschnitt 6.4]

[3]Poisson-Prozesse sind gerade (lassen sich fast immer differenzieren), machen aber zu zufälligen (exponential verteilten) Zeitpunkten Sprünge.

Dabei steht der Investor Assetpreisen gegenüber, deren zukünftige Entwicklung durch die Parameter (Drift und Volatilität) der Itô-Diffusion beschrieben ist. Diese Parameter, parallel zu Erwartungswertvektor und Kovarianzmatrix im zeitdiskreten CAPM, sind für das Optimierungsproblem des einzelnen Investors exogen, er kennt sie und nimmt sie als gegeben hin.

Daraus ergibt sich ein Problem der stochastischen dynamischen Programmierung, das durch Anwendung des Bellmanschen Optimalitätsprinzip gelöst werden kann: Man postuliert zunächst eine indirekte Nutzenfunktion J, die den optimalen erwarteten zukünftigen Nutzen darstellt, den man durch Konsum aus dem jetzigen Vermögen bis zum Planungshorizont erzielen kann. Im Gegensatz zur ursprünglichen Nutzenfunktion ist sie also nicht eine Funktion des Konsums zu einem bestimmten Zeitpunkt, sondern eine Funktion des Vermögens zu einem bestimmten Zeitpunkt, und sie setzt gewissermaßen die Lösung des Problems, nämlich die optimale Konsum- und Anlageentscheidung, schon voraus – daher ist sie zunächst unbekannt.

Allerdings kann man nun mittels Bellman eine partielle Differentialgleichung für J finden, und daraus die optimale Konsumrate und Anlageentscheidung in Abhängigkeit von J, und wenn man die wiederum in diese Differentialgleichung einsetzt, dann kann man (für einfache Fälle) auch nach J auflösen. Aber auch ohne diesen Schritt gewinnt man schon Einsichten in die Anlageentscheidung des Investors.

Nun aggregiert man alle diese Anlageentscheidungen der einzelnen Investoren zusammen und postuliert ein Gleichgewicht, und damit kann man – wie zuvor im zeitdiskreten Fall – einige Parameter endogenisieren, nämlich die erwartete Rendite (den Drift) der Assetpreise: Man hat wieder die CAPM-Gleichung.

Das zeitkontinuierliche CAPM ermöglicht also im einfachsten Fall für lognormalverteilte Assetpreise eine Verknüpfung zwischen erwarteter Rendite (Drift) und Kovarianz mit dem Marktportfolio.

7.1 Grundlagen und Annahmen

Im zeitkontinuierlichen CAPM wird kontinuierlich gehandelt, von jetzt ($t = 0$) an unaufhörlich, wobei jeder Investor i nur über seine Lebenszeit T^i plant.

Es gibt J Basiswertpapiere, deren Preis (real, also in Einheiten des Konsumgutes) zum Zeitpunkt t gerade $\tilde{x}_j(t)$ beträgt. [4] Dabei ist x_j eine Abbildung von $\mathcal{S} \times [0, \max_i T^i] \mapsto \mathbb{R}$, also ein stochastischer Prozeß.

Jeder Investor konsumiert kontinuierlich mit einer gewissen Konsumrate $c^i(t)$, und diese Konsumrate gibt ihm zu jedem Zeitpunkt einen gewissen Nutzen. Außerdem bewertet er das Vermögen $W^i(T^i)$, was er am Ende seines Planungshorizontes hat, mit der passend genannten „Vererbungsfunktion" $B^i(W^i(T^i), T^i)$. Nun integriert man den Konsumnutzen über die Zeit,

[4] Die Assets zahlen keine Dividenden.

addiert den Vererbungsnutzen, nimmt den Erwartungswert, und hat die Zielfunktion, die der Investor zu maximieren sucht durch geschickte Konsum- und Anlageentscheidung.

7.1.1 Assets und Budget

In der einfachsten Version folgt jeder stochastische Assetpreis einer geometrischen Brownschen Bewegung, hat also im wesentlichen eine sofortige Rendite, die zufällig (normalverteilt) um einen Mittelwert μ_j schwankt. Die wesentlichen Parameter, die einen Asset dann beschreiben, sind dieser Mittelwert μ_j, sowie die Standardabweichung der Normalverteilung.[5] Hier wird angenommen, daß diese Parameter konstant sind. Mit Itôs Lemma läßt sich zeigen, daß die riskanten Assetpreise dann lognormalverteilt sind.

Zusätzlich gibt es ein risikoloses Asset mit konstanter kontinuierlicher Rendite r_f.

Die Verteilung der Assetpreise

Annahme 7.1.1 (Assetpreise lognormalverteilt). *Die Preise der J riskanten Assets folgen einer geometrischen Brownschen Bewegung mit F unabhängigen Wienerprozessen:*

$$d\tilde{p}_j(t) = \mu_j \, \tilde{p}_j(t) \, dt + \sum_{f=1}^{F} b_{jf} \tilde{p}_j(t) \, d\tilde{z}_f \qquad \forall j = 1, \ldots, J. \tag{7.1}$$

Das risikolose Asset folgt

$$dp_f(t) = r_f p_f \, dt, \qquad \textit{also} \qquad p_f(t) = p_f(0) e^{r_f t} \tag{7.2}$$

Die F Prozesse $d\tilde{z}_f$ sind unabhängige Standardwienerprozesse, es gilt also heuristisch:

$$E[d\tilde{z}_f] = 0 \tag{7.3}$$

$$Var[d\tilde{z}_f] = E[(d\tilde{z}_f)^2] = dt \tag{7.4}$$

$$cov[dz_f, dz_g] = E[dz_f \, dz_g] = \begin{cases} 0 & \text{für } f \neq g \\ dt & \text{für } f = g. \end{cases} \tag{7.5}$$

Diese drei Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu

$$E[\underset{F\times 1}{d\,\tilde{\mathbf{z}}}\,] = \underset{F\times 1}{\mathbf{0}} \qquad \text{und} \qquad E[\underset{F\times 1}{d\tilde{\mathbf{z}}}\;\underset{1\times F}{d\tilde{\mathbf{z}}'}] = \underset{F\times F}{I}\; dt \tag{7.6}$$

[5] Das zeitkontinuierliche CAPM stellt dann, wie das einperiodige, einen Zusammenhang zwischen diesem μ_j und der Kovarianz des Assets j zum Markt her.

Die Inkremente der Prozesse von einem Zeitpunkt zum nächsten haben also einen Erwartungswert von Null, eine Varianz in der Größenordnung der Zeitspanne zwischen den Zeitpunkten, und sie sind untereinander unkorreliert. Diese Wienerprozesse sind kontinuierlich, aber (fast sicher) nicht differenzierbar. So sollen unaufhörlich neu eintreffende, unvorhersehbare Informationen[6]mathematisch modelliert werden, die den Assetpreis beeinflussen. Die erste Gleichung (7.3) oben besagt ökonomisch, daß nicht erwartet wird, daß überwiegend positive Information erscheint, die den Assetpreis nach oben treibt, sondern Korrekturen nach oben und unten gleich wahrscheinlich sind.[7]. Die zweite Gleichung (7.4) besagt, daß die Unsicherheit, was die Zukunft betrifft, umso größer wird, je weiter man in die Zukunft schaut.

Der Drift μ_j gibt intuitiv die erwartete, normale kurzfristige Rendite an, zu der die Wienerprozesse eine zufällige Störgröße addieren. Die Volatilität b_{jf} gibt an, wie stark der Wienerprozeß f auf Asset j einwirkt, wie sensibel also dieses Asset bezüglich der Unsicherheitsquelle f ist. Wenn alle b_{0f} Null sind für Asset 0, dann handelt es sich um das risikolose Asset, das mit μ_0 kontinuierlich verzinst wird.

Die Assetpreise sind damit lognormalverteilt genau wie im Black-Scholes-Modell zur Optionsbewertung, können aber von mehreren Wienerprozessen abhängen. (Gäbe es nur eine Unsicherheitsquelle, wären ja alle Assetpreise perfekt korreliert.) Dadurch, daß sie von mehreren Unsicherheitsquellen abhängen, andererseits umgekehrt durchaus eine Unsicherheitsquelle auf mehrere Assets wirken kann, können die Assets korreliert sein, aber nicht unbedingt perfekt.

Die Lognormalverteilung findet eine willkommene ökonomische Interpretation darin, daß die Assets begrenzte Haftung haben, ihre Preise also nicht negativ werden können.

Zu jedem Zeitpunkt steht der Investor den Assetpreisen gegenüber, deren weitere Entwicklung vollständig durch Drift μ_j und Volatilitäten b_{jf} charakterisiert ist[8]. Die Werte dieser Parameter zu einem bestimmten Zeitpunkt seien daher als „Investitionsspektrum“ zu diesem Zeitpunkt bezeichnet (englisch: „investment opportunity set“), und hier wird der Fall eines konstantes Investitionsspektrums betrachtet. Das Investitionsspektrum faßt

[6]Die neuen Informationen sind also als zahlreich, aber sehr klein angenommen. Sporadisch auftretende schwerwiegende Informationen, die zu einem Preissprung („Crash“) führen, lassen sich durch Poisson-Prozesse modellieren. Jarrow und Rosenfeld haben ein zeitkontinuierliches CAPM mit Sprüngen theoretisch und empirisch untersucht [32], und sie kamen zum Schluß, daß auch in diesem Fall das CAPM gilt – vorausgesetzt, die Sprünge lassen sich wegdiversifizieren (sie treten also nur bei einzelnen Assets auf, der Gesamtmarkt springt aber nicht). Diese Annahme läßt sich aber empirisch nicht halten.

[7]Der Assetpreis geht zwar im Schnitt nach oben, um den Investor für seinen Konsumverzicht und das übernommene Risiko zu entlohnen, aber dieser Trend wird ja explizit im Drift μ_j modelliert, nicht bei der einfließenden neuen Information.

[8]Soweit man sie beschreiben kann, denn innerhalb des dadurch gesteckten Rahmens schlägt dann ja der Zufall zu.

also die Werte zusammen, die der Investor für sein Entscheidungsproblem braucht (entsprechend im zeitdiskreten Modell Erwartungswertvektor und Kovarianzmatrix).

Definition (Investitionsspektrum). Das Investitionsspektrum besteht aus Drift und Volatilitäten der Renditenprozesse der Assetpreise und beschreibt, welche Investitionsmöglichkeiten die Investoren zu einem bestimmten Zeipunkt haben.

Bevor man zur nächsten Frage geht – wie wählt der Investor jetzt angesichts dieser Investitionsmöglichkeiten sein Portfolio – wird noch etwas mit diesem Modell gearbeitet. Die stochastische Differentialgleichung für die Preise enthält ja den Preis auf der rechten Seite, und es ist oft hilfreich, ihn auszuklammern und auf die andere Seite zu holen. Sei also zur Abkürzung ein $\tilde{r}_j$ definiert, das man als relative Preisänderung verstehen kann; es gibt an, wieviel man in einem infinitesimalen Zeitintervall gewinnt an Asset j, wenn man genau eine Einheit darin investiert hat. Es wird bezeichnet als sofortige Rendite oder kurz Rendite (englisch: „instantaneous rate of return".).

Definition (Sofortige Rendite). Die sofortige Rendite $\tilde{r}_j$ gibt an, wieviele Einheiten man im Zeitintervall dt gewinnt pro (in j) investierter Einheit.

$$\tilde{r}_j(t) := \frac{d\tilde{p}_j(t)}{\tilde{p}_j(t)} = \mu_j\, dt + \sum_{f=1}^{F} b_{jf}\, d\tilde{z}_f \quad j = 1, \ldots, J, \tag{7.7}$$

oder, als J-dimensionaler Vektor für alle Assets zusammengefaßt:

$$\underset{J\times 1}{\tilde{\mathbf{r}}}(t) = \underset{J\times 1}{\boldsymbol{\mu}}\, dt + \underset{J\times F}{B}\, \underset{F\times 1}{d\tilde{\mathbf{z}}}(t). \tag{7.8}$$

wobei nun B eine Matrix der Gewichte ist, mit der die Wienerprozesse auf die einzelnen Assetpreise einwirken, also der Volatilitäten.

Später wird auch der Erwartungswertvektor und die Kovarianzmatrix dieser Renditen benötigt, also sei es berechnet. Die Kovarianz gewinnt man ganz normal durch einsetzen in die Definition:

$$E[\tilde{r}_j(t)] = \mu_j\, dt \tag{7.9}$$

$$cov[\tilde{r}_j(t), \tilde{r}_k(t)] = E\Big[\big(\tilde{r}_j(t) - E[\tilde{r}_j(t)]\big)\big(\tilde{r}_k(t) - E[\tilde{r}_k(t)]\big)\Big] \tag{7.10}$$

$$= E\left[\left(\sum_{f=1}^{F} b_{jf}\, d\tilde{z}_f\right)\left(\sum_{f=1}^{F} b_{kf}\, d\tilde{z}_f\right)\right] \tag{7.11}$$

und wenn man berücksichtigt, daß $d\tilde{z}_f \, d\tilde{z}_g = 0$ für $f \neq g$ und $d\tilde{z}_f \, d\tilde{z}_f = dt$

$$cov[\tilde{r}_j(t), \tilde{r}_k(t)] = \sum_{f=1}^{F} b_{jf} b_{kf} \, dt. \tag{7.12}$$

Um die Kovarianz zweier Assets zu bestimmen, muß man also einfach für jede Unsicherheitsquelle die entsprechenden Volatilitäten multiplizieren und dann alle diese Produkte summieren; zwei Assets sind also höchstens dann korrelliert, wenn es wenigstens einen Wienerprozess gibt, der beide beeinflußt.

Der Erwartungswertvektor und die Kovarianzmatrix sind wie folgt:

$$E[\tilde{\mathbf{r}}(t)] = \boldsymbol{\mu} \, dt \tag{7.13}$$

$$\mathbf{V} \, dt = E[(\tilde{\mathbf{r}}(t) - E[\tilde{\mathbf{r}}(t)])(\tilde{\mathbf{r}}(t) - E[\tilde{\mathbf{r}}(t)])'] \tag{7.14}$$

$$= E[(B \, d\tilde{\mathbf{z}})(B \, d\tilde{\mathbf{z}})'] = B \, E[d\tilde{\mathbf{z}} d\tilde{\mathbf{z}}'] \, B' = BIB' \, dt \tag{7.15}$$

also

$$\mathbf{V} = BB'. \tag{7.16}$$

Die Budgetgleichung

Wie kann der Investor jetzt konsumieren und investieren? Nun, wenn er in einem Zeitraum mehr konsumiert, als sein Portfolio an Wertsteigerung in diesem Zeitraum erbracht hat, dann muß er sein Vermögen angreifen. Dieser einfache Sachverhalt soll nun formalisiert werden.

Jeder Investor i hat eine Anfangsausstattung an Vermögen von W_0^i. Später ist sein Vermögen $W^i(t)$, wovon er $W_j^i(t)$ in das j-te riskante Asset investiert hat. Der *Anteil*, den er in das j-te Asset investiert, ist mit y_j^i bezeichnet. Die y_j^i kann man in einen Vektor $\mathbf{y}^i$ zusammenfassen, und es gilt

$$y_j^i(t) = \frac{W_j^i(t)}{W^i(t)} \tag{7.17}$$

$\mathbf{y}^i(t)$ ist also das Portfolio der riskanten Assets, das angibt, welchen Anteil seines Vermögens ein Investor i zum Zeitpunkt t in die verschiedenen riskanten Assets investiert hat.

Der Rest muß also in das risikofreie Asset investiert sein:

$$W_f^i(t) = W^i(t) - \sum_{j=1}^{J} W_j^i(t), \qquad \text{also} \tag{7.18}$$

$$y_f^i(t) = 1 - \sum_{j=1}^{J} y_j^i(t) = 1 - \mathbf{1}'\mathbf{y}^i. \tag{7.19}$$

Das gesamte Portfolio $(y_f, \mathbf{y}')'$ ist also normiert.

Konsum

Das Vermögen wie auch die Preise der Assets sind in Einheiten des einen Konsumgutes ausgedrückt. Ebendieses konsumiert der Investor auch mit einer gewissen Konsumrate, und zwar $c^i(t)$ Einheiten des Konsumgutes pro Zeiteinheit, im infinitesimalen Intervall dt also $c^i(t)dt$.

Wertsteigerung des Portfolios

Wie ändert sich nun das Vermögen eines Investors in einem infinitesimalen Zeitraum dt?

Der Preis des j-ten Asset zur Zeit t ist, wie oben gesagt, $\tilde{p}_j(t)$, und die Preisänderung im Intervall dt also $\tilde{p}_j(t+dt) - \tilde{p}_j(t)$ oder kurz $d\tilde{p}_j(t)$. Pro investierter Einheit gewinnt der Investor also $\frac{d\tilde{p}_j(t)}{\tilde{p}_j(t)}$, er hatte aber $W^i_j(t) = W^i(t)\, y^i_j$ Einheiten in das j-te Asset investiert.

An einem riskanten Asset j gewinnt der Investor in einem infinitesimalen Zeitintervall dt also

$$W^i(t) y^i_j(t)\, \frac{d\tilde{p}_j(t)}{\tilde{p}_j(t)} = W^i(t) y^i_j(t) \left(\mu_j\, dt + \sum_{f=1}^{F} b_{jf}\, dz_f \right), \tag{7.20}$$

denn der Bruch ist ja gerade die sofortige Rendite, und die ist ja durch einen bekannten stochastischen Prozeß gegeben, Gleichung (7.7).

Für das risikolose Asset gilt $\frac{dp_f}{p_f} = r_f\, dt$ (Gleichung (7.2)), und der Investor hat $W^i_f = W^i y^i_f$ darin investiert.

An allen Assets zusammen gewinnt der Investor dann (hier wird nun die Abhängigkeit von der Zeit weggelassen)[9]:

$$\sum_{j=f,1\ldots J} W^i_j \frac{dp_j}{p_j} = W^i\, y^i_f \frac{dp_f}{p_f} + \sum_{j=1}^{J} W^i\, y^i_j\, \frac{d\tilde{p}_j}{\tilde{p}_j} \tag{7.21}$$

$$= W^i\, y^i_f r_f\, dt + W^i\, \mathbf{y}^{i\,\prime} \tilde{\mathbf{r}} \tag{7.22}$$

Nun kann man den Anteil im risikofreien Asset y^i_f nach Gleichung (7.19) ersetzen, und den Vektor der sofortigen riskanten Renditen nach (7.2), und erhält:

$$\sum_{j=f,1\ldots J} W^i_j \frac{dp_j}{p_j} = W^i\, (1 - \mathbf{1}'\mathbf{y}^i) r_f\, dt + W^i\, \mathbf{y}^{i\,\prime}(\boldsymbol{\mu}\, dt + Bd\tilde{\mathbf{z}}) \tag{7.23}$$

$$= W^i \left[\big(r_f + \mathbf{y}^{i\,\prime}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})\big) dt + \mathbf{y}^{i\,\prime} Bd\tilde{\mathbf{z}} \right] \tag{7.24}$$

[9] Die Notation $j = f, 1 \ldots J$ bedeutet, daß über das risikolose und alle riskanten Assets j summiert wird.

Das ist also die sofortige Gesamtrendite des Portfolios des Investors, sie ergibt sich als gewichtete Summe der sofortigen Renditen der Assets. Sie gibt an, wieviel Einheiten man in einem infinitesimalen Zeitraum durch die Preisänderungen der Assets in dem Portfolio (mit Investition von einer Einheit) gewinnt.

Die Budgetbeschränkung

Gleichzeitig konsumiert der Investor aber $c^i(t)dt$, so daß die Gesamtänderung seines Vermögens, wenn man die Gewinne durch alle Assets und seinen Konsum berücksichtigt, in Kurzform folgende ist:

$$\begin{aligned} dW &= W\Big[\big(r_f + \mathbf{y}'(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})\big)dt + \mathbf{y}'Bd\tilde{\mathbf{z}}\Big] - c\,dt && (7.25)\\ &= \Big[W\big(r_f + \mathbf{y}'(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})\big) - c\Big]dt + W\,\mathbf{y}'Bd\tilde{\mathbf{z}}, && (7.26)\end{aligned}$$

oder ausführlich:

$$\begin{aligned} dW^i(t) &= \sum_{j=f,1\ldots J} W^i_j(t)\frac{dp_j(t)}{p_j(t)} \quad - \; c^i(t)\,dt && (7.27)\\ &= \left[W^i(t)\left(r_f + \sum_{j=1}^{J} y^i_j(t)(\mu_j - r_f)\right) - c^i(t)\right]dt \\ &\quad + W^i(t)\sum_{j=1}^{J}\left(y^i_j(t)\sum_{f=1}^{F} b_{jf}\,d\tilde{z}_f\right) && (7.28)\end{aligned}$$

Das Vermögen folgt also auch einem eindimensionalen Itô-Prozeß mit mehreren Unsicherheitsquellen, mit Drift $W\big(r_f + \mathbf{y}'(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})\big) - c$ und Volatilitäten $W\mathbf{y}'B$.

Nun kann der Investor darangehen, seinen erwarteten Konsum- und Vererbungsnutzen durch Wahl von Konsumrate und Portfolio zu maximieren, unter genau dieser Budgetbeschränkung.

Für später sei aber noch Erwartungswert des Inkrements (7.26) und seines Quadrats berechnet:

$$E[dW] = \Big[W\big(r_f + \mathbf{y}'(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})\big) - c\Big]dt \qquad (7.29)$$

oder das gleiche ausführlich

$$E[dW^i(t)] = \left[W^i(t)\left(r_f + \sum_{j=1}^{J} y^i_j(t)(\mu_j - r_f)\right) - c^i(t)\right]dt \qquad (7.30)$$

Beim Quadrat werden die höheren Ordnungen von dt weggelassen, und nur die stochastischen Terme bleiben übrig:

$$E\big[(dW)^2\big] = E\big[(W\mathbf{y}'B\,d\tilde{\mathbf{z}})^2\big] = W^2\mathbf{y}'B\,E[d\tilde{\mathbf{z}}\,d\tilde{\mathbf{z}}']B'\mathbf{y} \tag{7.31}$$

Einsetzen von Gleichung (7.6) und (7.16) ergibt

$$E\big[(dW)^2\big] = W^2\,\mathbf{y}'BIB'\mathbf{y} = W^2\,\mathbf{y}'BB'\mathbf{y} = W^2\,\mathbf{y}'\mathbf{V}\mathbf{y} \tag{7.32}$$

oder das gleiche ausführlich

$$E[(dW^i(t))^2] = \big(W^i(t)\big)^2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{J} y_j^i(t)\,y_k^i(t)\,v_{jk}\,dt \tag{7.33}$$

Zur Interpretation: Der erwartete Wert des Inkrements ist gerade der Drift, eben die erwartete sofortige Rendite des Portfolios abzüglich der Konsumrate. Die Unsicherheitsquellen fallen hier weg, da sie einen Erwartungswert von null haben.

Beim erwartete Wert des quadratischen Inkrements ist es gerade andersherum: Er kommt nur von den Unsicherheitsquellen[10], und zwar einfach als sofortige Varianz, die sich aus der Gewichtung der Kovarianzen zweier Assets mit den jeweiligen Anteilen an diesen Assets ergibt, ganz ähnlich wie im zeitdiskreten CAPM.

7.1.2 Investoren und ihr Nutzen

Im klassischen zeitdiskreten CAPM (Black oder Sharpe/Linter/Mossin) mußten die Investoren nur einmal entscheiden, welchen Anteil ihres Vermögens sie in welches Asset investieren. Ihre Präferenzen betreffen *eine* Zufallsvariable, nämlich ihren stochastischen Konsum morgen. Die Budgetbeschränkung ist, daß sie das gesamte Vermögen für morgen investieren, nicht mehr und nicht weniger.

In Jarrows zeitdiskreten CAPM mußten die Investoren entscheiden, wieviel sie heute konsumieren, und in welcher Aufteilung sie den Rest ihres Anfangsvermögens investieren. Ihre Präferenzen betreffen *zwei* Variablen, nämlich den Konsum heute und den stochastischen Konsum morgen. Die Budgetbeschränkung ist, daß sie das gesamte Vermögen, nicht mehr und nicht weniger, jetzt konsumieren *oder* für morgen investieren.

Im zeitkontinuierlichen CAPM müssen die Investoren in jedem Zeitpunkt entscheiden, was die optimale Konsumrate ist, und was die optimale Aufteilung ihres Vermögens auf die verschiedenen Assets ist. Ihre Präferenzen

[10] Die in der Formel zunächst vorkommenden höheren Ordnungen von dt fallen weg, da sie für kleine Werte vernachlässigbar klein werden, während $d\tilde{z}^2$ nicht vernachlässigbar wird, da es ja eine Zufallsgröße ist, also eine gewissen Varianz hat, und die ist in der der Größenordnung von dt, grob gesprochen.

betreffen einen Zufalls*prozeß* (und eine Zufallsvariable), nämlich ihre Konsumrate über ihre Lebenszeit (und ihre Hinterlassenschaft). Die Budgetbeschränkung ist (ungefähr), daß die Änderungsrate ihres Vermögens gleich der Ausschüttungsrate ihres Portfolios minus der Konsumrate ist.

Wie modelliert man jetzt des Investors Präferenzen im Verlauf der Zeit?

Die Nutzenfunktion der Investoren

Zunächst werden sichere Alternativen bewertet, also eine bestimmte Konsumrate über die gesamte Zeitspanne und ein bestimmtes Endvermögen. Der Investor zieht also Nutzen aus dem Konsum über den gesamten Zeitraum und aus dem Restvermögen am Ende des Planungszeitraumes.

Das Endvermögen $W^i(T^i)$ wird mit der Funktion B (wie „Bequest" , Hinterlassenschaft) bewertet, die auch vom Planungshorizont T^i des Investors abhängt: $B = B^i(W^i(T^i), T^i)$.

Bei der Bewertung des Konsums könnte nun eine von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion eingesetzt werden, mit der die Konsumrate an einigen Punkten „gesamplet" wird, also der Form $U(C(0), C(\Delta t), C(2\Delta t), \ldots, C(T^i))$. Das sieht formal genau so aus wie der Nutzen in einem einperiodigen Modell mit vielen verschiedenen Konsumgütern. Man könnte das mehrperiodige Problem also behandeln, als wäre das Konsumgut zu verschiedenen Zeitpunkten einfach verschiedene Konsumgüter, und in der Tat, wenn den Präferenzen nicht noch mehr Struktur auferlegt würde, wäre das der einzige gangbare Weg.

Im kontinuierlichen Grenzfall wäre eine allgemeinere Lösung zur Bewertung sicherer Alternativen einfach $U : (c : [0, T^i] \mapsto \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$, eine Funktion, die eine Funktion der Zeit auf $\mathbb{R}$ abbildet. Es handelte sich also um eine sehr allgemeine Vorschrift, eine beliebige Funktion der Zeit als ganzes zu bewerten.

Das würde aber analytisch immer noch zu schwer zu handhaben sein, und daher nimmt man an, daß der Konsum zu einer Zeit den Nutzen des Konsums zu einer anderen Zeit nicht beeinflußt. [11] Der Nutzen einer Zeitreihe von Konsumraten läßt sich dann als Summe von Nutzen von einzelnen Konsumraten ausdrucken, oder im kontinuierlichen Grenzfall als Integral, also, wenn c eine reelle Funktion der Zeit $[0, T] \mapsto \mathbb{R}_+$ ist, nämlich ein bestimmter Konsumratenprozeß:

$$U(c) = \int_{l=0}^{T^i} \hat{U}(c(l), l)\, dl. \tag{7.34}$$

Die einfache Nutzenfunktion $\hat{U}(c(l), l)$ bewertet also die sichere Konsumrate $c(l)$ zum Zeitpunkt l.[12] *Die Zeitpräferenz des Investors ist implizit in*

[11] Eine unrealistische Annahme, wenn man bedenkt, daß der Nutzen eines Glas Wassers erheblich davon abhängt, was man in der letzten Woche so getrunken hat.

[12] Der Buchstabe t wird später benötigt, daher hier l als Integrationsvariable.

dieser Funktion enthalten, sie wird also typischerweise der gleichen Konsumrate zu einem späteren Zeitpunkt weniger Nutzen zuschreiben, ihn also abzinsen. Der gesamte Konsumnutzen wird dann als Integral darüber gebildet.

Eine solche additive und separable Funktion zur Bewertung einer sicheren Konsumrate von jetzt bis zum Tod wird also benutzt, plus eine Funktion B zur Bewertung der Hinterlassenschaft. Damit kann der Investor eine sichere Alternative nun bewerten, da die Wienerprozesse aber Unsicherheit hineinbringen, wird nun noch der Erwartungswert gebildet. Insgesamt versucht der Investor dann diese Zielfunktion zu maximieren:

Annahme 7.1.2 (Additive und separable Präferenzen). *Es wird angenommen, daß die Präferenzen jedes Investors i sich in dieser Form ausdrücken lassen:*

$$U^i_{\tilde{C}} = E\left[\int_{l=0}^{T^i} \hat{U}^i\big(c^i(l), l\big)\, dl + B^i\big(W^i(T^i), T^i\big)\right], \tag{7.35}$$

wobei $c^i(l)$ die Konsumrate zum Zeitpunkt l ist, $\hat{U}^i(c^i(l), l)$ eine von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion zur Bewertung der sicheren Alternative $c^i(l)$ zum Zeitpunkt l, und B eine Funktion zur Bewertung des Endvermögens.

Das Integral ergibt den gesamten „Konsumnutzen“, B den „Vererbungsnutzen“. Der Nutzen eines Investors ist also gebildet als Erwartungswert von Konsumnutzen (über einen stochastischen Prozeß, nämlich seine Konsumrate) plus Vererbungsnutzen (über sein Endvermögen).

Aufgabe des Investors ist nun, das zu maximieren, unter der Budgetbeschränkung. Dieses Optimierungsproblem wird im nächsten Abschnitt explizit formuliert und gelöst, aber zunächst werden die notwendigen Annahmen zusammengestellt.

7.1.3 Zusammenfassung der Annahmen

Es werden die folgenden Annahmen getroffen[13]:

Bezüglich der Assets:

Annahme 7.1.3 (Renditenprozeß). *Es gibt J riskante Assets, die durch ihre exogen gegebenen stochastischen Renditenprozesse $\tilde{r}_j(t) = \frac{dp_j(t)}{p_j(t)}$ spezifiziert sind:*

$$\underset{J\times 1}{\tilde{\mathbf{r}}}(t) = \underset{J\times 1}{\boldsymbol{\mu}}\, dt + \underset{J\times F}{B}\, \underset{F\times 1}{d\tilde{\mathbf{z}}}(t), \tag{7.36}$$

wobei $d\tilde{\mathbf{z}}$ ein F-dimensionaler Standard-Wienerprozess ist.

[13] Einige sehr technische Annahmen werden weggelassen, siehe dazu z. B. [31]

Annahme 7.1.4 (Konstantes Investitionsspektrum). *Das Investitionsspektrum* $\{r_f, \boldsymbol{\mu}, B\}$ *ist konstant (also Drift und Volitilitäten der Renditenprozesse).*

Annahme 7.1.5 (Varianz finit, Erwartungswerte nicht gleich). *Die Assetrenditeprozesse haben finite sofortige Varianzen und Kovarianzen, d. h. die sofortige Kovarianzmatrix* $\mathbf{V}$ *existiert. Außerdem hat wenigstens ein Asset einen Drift* μ *ungleich dem anderer.*

Annahme 7.1.6 (Assets linear unabhängig). *Die Assetrenditen sind linear unabhängig*[14]*, die Kovarianzmatrix ist also regulär und positiv definit.*

Dies impliziert, daß die Zahl der Faktoren F größer oder gleich der Zahl J der riskanten Assets ist!

Bezüglich der Investoren

Annahme 7.1.7 (Additive und separable Präferenzen). *Der Nutzen jedes Investors i läßt sich in dieser Form ausdrücken:*

$$U^i_{\mathcal{C}} = E\left[\int_{l=0}^{T^i} \hat{U}^i\big(c^i(l), l\big)\, dl + B^i\big(W^i(T^i), T^i\big)\right], \tag{7.37}$$

wobei $c^i(l)$ *die Konsumrate zum Zeitpunkt* l *ist,* $\hat{U}^i(c^i(l), l)$ *eine von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion zur Bewertung der sicheren Alternative* $c^i(l)$ *zum Zeitpunkt* l*, und* B *eine Funktion zur Bewertung des Endvermögens.*

Annahme 7.1.8 (Existenz einer Lösung). *Es gibt eine optimale Lösung für das Entscheidungsproblem jedes einzelnen Investors.*[15]

Annahme 7.1.9 (Nutzenfunktion monoton und quasikonkav). *Die Nutzenfunktion* $\hat{U}(c(t), t)$ *ist zu jedem Zeitpunkt streng monoton steigend im Konsum, strikt konkav*[16]*, und, zur einfacheren Handhabung, wenigstens zweimal stetig differenzierbar (auch unter Erwartungswertbildung).*

Äquivalente Bedingungen gelten für die Vermächtnisfunktion $B(W(T), T)$.

[14] In dem oben besprochenen Sinne, Seite 17.

[15] Man könnte das Entscheidungsproblem des Investors auch noch weiteren Nebenbedingungen unterwerfen, daß z. B. die Konsumrate und das Vermögen nie negativ werden. Es wird angenommen, daß all diese Nebenbedingungen in der unrestringierten optimalen Lösung erfüllt sind. (Für einige spezielle Formen der Nutzenfunktion, für die Merton [46] das Entscheidungsproblem explizit gelöst hat (z. B. J explizit bestimmt hat), ist dies der Fall.)

[16] Das impliziert streng monoton fallende erste Ableitungen, wichtig um die optimale Konsumrate eindeutig bestimmen zu können.

Annahme 7.1.10 (Homogene Erwartungen). *Alle Investoren betrachten die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Renditenprozesse als gleich, insbesondere stimmen sie in der Einschätzung des Investitionsspektrums überein. (Und es gibt keine Insider.)*

Annahme 7.1.11 (Existenz der abgeleiteten Nutzenfunktion). *Der abgeleitete Nutzen des Vermögens $J(W(t), t)$ existiert und ist zweifach stetig differenzierbar.*

Bezüglich des Markts

Annahme 7.1.12 (Investoren als Preisnehmer). *Investoren sind Preisnehmer, können also einzeln durch ihr Handeln die Renditen nicht beeinflussen.*

Annahme 7.1.13 (Vollkommener Markt). *Die Menge der gehandelten Portfolios ist $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^{J+1}$. Das Preisfuntional ist linear. Der Markt sei reibungslos, beschränkungsfrei, arbitragefrei, und kontinuierlich.*

Die erste Aussage impliziert, daß alle Portfolios ohne Beschränkungen gehandelt werden (ohne Leerverkaufsbeschränkungen z. B.), und die Assets perfekt teilbar sind. Die zweite Aussage impliziert, daß die sfortige Rendite eines Portfolios gleich dem gewichteten Mittel der sofortigen Renditen der Assets ist. Weiterhin gibt es keine Transaktionskosten oder Steuern, und keine sicheren Arbitragemöglichkeiten.

Annahme 7.1.14 (Konstantes Preisniveau von 1). *Der Preis für eine Einheit des Konsumgutes sei zu allen Zeitpunkten gleich 1.*

Das heißt, daß die Analyse ohne Unterschied in realen oder nominalen Einheiten durchgeführt werden kann, und Inflation keine Rolle spielt.

Annahme 7.1.15 (Gleichgewicht existiert). *Es wird angenommen, daß zu jedem Zeitpunkt ein Marktgleichgewicht existiert und herrscht.*

7.2 Das Optimierungsproblem des Investors

Das Problem eines zeitkontinuierlichen Investors, eine optimale Portfolio- und Konsumentscheidungen zu treffen, läßt sich unter diesen Annahmen wie folgt formulieren:

Gegeben

Für den Investor i

W_0^i	Anfangsausstattung an Vermögen (in Einheiten des Konsumgutes)
T^i	Planungshorizont

$\hat{U}^i\big(c^i(l), l\big)$	Nutzen der Konsumrate $c(l)$ zum Zeitpunkt l
$B^i\big(W^i(T^i), T^i\big)$	Nutzen des Endvermögens

Für das Marktumfeld

$\mathbf{p}_0$	Anfangswert der Assetpreise (Einheiten des Konsumgutes)
$\{r_f, \tilde{\boldsymbol{\mu}}, B\}$	Investitionsspektrum mit
r_f	Risikoloser kontinuierlicher Verzinsung
$\tilde{\boldsymbol{\mu}}$	Drift der Assetpreise
B	Ladungsmatrix der Assetpreise

wähle $c^i(t), \mathbf{y}^i(t)$, und $y^i_f(t)$ für $t \in [0, T^i]$ so, daß der Gesamtnutzen[17]

$$\max E_0 \left[\int_{l=0}^{T^i} \hat{U}^i\big(c^i(l), l\big)\, dl + B^i\big(W^i(T^i), T^i\big) \right] \tag{7.38}$$

maximiert wird unter den Nebenbedingugen

$$dW^i(t) = \Big[W^i(t)\big(r_f + \mathbf{y}^i(t)'(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})\big) - c^i(t)\Big]dt + W^i(t)\,\mathbf{y}^i(t)'Bd\tilde{\mathbf{z}}(t). \tag{7.39}$$

wobei die Assetpreise $\tilde{\mathbf{p}}$ dem oben (Gleichung (7.1)) angegebenen Prozeß folgen.

Die Nebenbedingung ist die oben hergeleitete Budgetbeschränkung.

Die Lösung dieses Problems erweist sich als etwas trickreich, der Gedanke ist im wesentlichen der folgende: Am Ende des Planungshorizontes, zum Zeitpunkt T^i, ist der Nutzen des Investors bekannt, nämlich sein Vererbungsnutzen B, und der ist abhängig vom Endvermögen. Im Zeitpunkt davor $T - dt$ steht der Investor vor dem gleichen Problem wie in Jarrows Gleichgewichts-CAPM: Was konsumiert er in der nächsten Zeitspanne, und worin investiert er den Rest, so daß der Nutzen des Endvermögens maximal ist? Die Lösung des Problems verrät, wieviel Gesamtnutzen das Vermögen zu diesem früheren Zeitpunkt $T - dt$ hat, und nun kann man einen weiteren Zeitraum zurückgehen, und wieder das gleiche Problem lösen.

Man definiere also den abgeleiteten Nutzen des *Vermögens*:

Definition (Abgeleiteter Nutzen des Vermögens).

$$J^i\big(W^i(t), t\big) := \max E_t \left[\int_{l=t}^{T^i} \hat{U}^i\big(c^i(l), l\big)\, dl + B^i\big(W^i(T^i), T^i\big) \right] \tag{7.40}$$

wobei unter den gleichen Nebenbedingungen wie oben (7.39) maximiert wird.

[17] Das Subskript 0 am Erwartungswertoperator deutet an, daß der Erwartungswert zum Zeitpunkt (und mit dem Informationsstand von) $t = 0$ gebildet werden soll.

Dies ist der abgeleitete Nutzen des Vermögens zum Zeitpunkt t; es ist der maximale Erwartungsnutzen, den der Investor vom Zeitpunkt t an noch verwirklichen kann, gegeben die Realisierungen der Zufallsprozesse bis dahin, also auch sein Vermögen $W^i(t)$ dann. [18]

Diese Funktion gibt an, wieviel Nutzen ein bestimmtes Vermögen zum Zeitpunkt t für den Investor hat, wieviel Nutzen der Investor also durch Konsum und Vererben erlangen kann, immer angenommen, er setzt es hinfort (von t bis T^i) optimal ein.

Zum Ende des Planungshorizontes hängt der Nutzen des dann verfügbaren Vermögens nur noch vom Nutzen der Hinterlassenschaft ab, vom Vererbungsnutzen, also[19]

$$J\big(W(T),T\big) = \max E_T\left[\int_{l=T}^{T} \hat{U}\big(c(l),l\big)\,dl + B\big(W(T),T\big)\right] \tag{7.41}$$

$$= B\big(W(T),T\big). \tag{7.42}$$

Zum Zeitpunkt $t = T$ ist der abgeleitete Nutzen des Vermögens also gegeben, nämlich durch die Funktion B. Nun, kurz davor, zum Zeitpunkt $T - dt$, muß der Investor entscheiden, wieviel er konsumiert (in der Zeitspanne dt) und worin er den Rest für die Zeitspanne anlegt. Die Verteilung des Endvermögens steht dann ja fest, je nach seinem Portfolio, und es bleibt nichts mehr zu entscheiden. Es ist also eine Abwägung zwischen dem sicheren Konsum jetzt und dem restlichen erwarteten Nutzen seiner Hinterlassenschaft später, aber der ist ja bekannt, nämlich $E[B(\tilde{W}(T),T)]$.

Nun, dieses Problem ist aber in Kapitel 6 gelöst worden: man kann das Problem behandeln, als wären es nur zwei Zeitpunkte, und die optimale Lösung ergibt den maximalen Nutzen des Vermögens, wenn der Investor sich für die letzte Periode optimal verhält. Damit kann man aber gleich den abgeleiteten restlichen Nutzen des Vermögens auch für $T - dt$ angeben.

Noch ein wenig vorher, in $T - 2dt$, stehr der Investor vor dem Problem, zu entscheiden, wie er sich in der nächsten Zeitspanne und in der darauf folgenden verhält. Andererseits ist der Nutzen des Vermogens am Ende dieser Zeitspanne, im Zeitpunkt $T - dt$, ja schon bekannt – also kann er sich wieder darauf konzentrieren, zwischen Konsum jetzt und restlichem Nutzen des Vermögens gleich abzuwägen – und so weiter ad infinitum, oder vielmehr bis heute, also $t = 0$.

Formal heißt das, daß für einen Zeitpunkt $t < t_1$ gilt[20]

[18] Weil das Investitionsspektrum konstant ist, hängt J^i nicht von $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ ab. Die zukünftigen Renditen der Preise hängen bei konstantem Investitionsspektrum nicht von den Preisen ab, und der Investor kann einfach unabhängig vom Preis eines Assets eine bestimmte Summe in es investieren.

[19] Der Index i wird wieder weggelassen.

[20] Unter dem max stehe in Gedanken immer $c(t)$ und $\tilde{\mathbf{y}}(t)$, denn das sind die Kontrollvariablen, an denen der Investor drehen kann.

$$
\begin{aligned}
J\big(W(t),t\big) &= \max E_t\left[\int_{l=t}^{T}\hat U\big(c(l),l\big)\,dl + B\big(W(T),T\big)\right] \qquad (7.43)\\
&= \max E_t\left[\int_{l=t}^{t_1}\hat U\big(c(l),l\big)\,dl + \int_{l=t_1}^{T}\hat U\big(c(l),l\big)\,dl + B\big(W(T),T\big)\right]
\end{aligned}
$$

und hier kommt der wesentliche Gedanke der dynamischen Programmierung ins Spiel: Wenn der Plan von t bis zum Ende des Planungshorizontes optimal sein soll, dann muß auch der Teilplan später, sagen wir von t_1 bis zum Tod, optimal sein, also

$$
J\big(W(t),t\big) = \max E_t\left[\int_{l=t}^{t_1}\hat U\big(c(l),l\big)\,dl + J\big(W(t_1),t_1\big)\right]. \qquad (7.44)
$$

Was haben wir nun? Einen abgeleiteten Nutzen des Vermögens zu bestimmten Zeiten – wobei die Funktion selber noch völlig unbekannt ist, außer am Ende des Planungszeitraumes, aber ein funktionaler Zusammenhang darüber steht schon mal da. Nur kann man mit dem noch nicht viel anfangen. Man hat aber für sehr kleine Zeitspannen die Beschreibung, wie sich das Vermögen ändern kann, und daher betrachtet man nun zwei sehr naheliegende Zeitpunkte.

Sei also (7.44) nun betrachtet für t und $t_1 = t + \Delta t$.

$$
J\big(W(t),t\big) = \max E_t\left[\int_{l=t}^{t+\Delta t}\hat U\big(c(l),l\big)\,dl + J\big(W(t+\Delta t),t+\Delta t\big)\right]. \qquad (7.45)
$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ist das Integral $\int_{l=t}^{t+\Delta t}\hat U(c(l),l)\,dl = \hat U(c(t^*),t^*)\cdot\Delta t$ für wenigstens ein $t^* \in [t, t+\Delta t]$.[21]

Den zweiten Term kann man, wenn die dritten Ableitungen von J beschränkt sind, in eine Taylorreihe entwickeln[22], so daß mit $W(t+\Delta t) - W(t) =: \Delta W$:

$$
\begin{aligned}
J\big(W(t+\Delta t),t+\Delta t\big) = J\big(W(t),t\big)&\\
+ \frac{\partial J\big(W(t),t\big)}{\partial W}\cdot\Delta W + \frac{\partial J\big(W(t),t\big)}{\partial t}\cdot\Delta t& \qquad (7.46)\\
+ \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 J\big(W(t),t\big)}{\partial W^2}\cdot(\Delta W)^2 + o(\Delta t)&
\end{aligned}
$$

Setzt man diese Ergebnisse in (7.45) ein, wobei hier zur Vereinfachung die partiellen Ableitungen von $J\big(W(t),t\big)$ mit Subskripten bezeichnet werden:

[21] Die Fläche des sehr dünnen, hohen Streifens unter dem Konsumnutzen kann angenähert werden durch die Fläche des Rechtecks mit Breite Δt und Höhe $\hat U$.

[22] Es werden nur die Terme erster Ordnung betrachtet, aber für stochastische Größen müssen die quadratischen Terme mitberücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} J\big(W(t),t\big) = \max E_t\Big[&\hat{U}(c(t^*),t^*)\cdot\Delta t + J\big(W(t),t\big) \\ &+ J_W(W(t),t)\cdot\Delta W + J_t(W(t),t)\cdot\Delta t \\ &+ \frac{1}{2}\,J_{WW}(W(t),t)\cdot(\Delta W)^2 + o(\Delta t)\Big]. \end{aligned} \tag{7.47}$$

Durch die Taylorreihenapproximation wird nun die Funktion J und alle benutzten partiellen Ableitungen nur noch an der Stelle $\big(W(t),t\big)$ betrachtet, daher werden diese Parameter der Übersichtlichkeit halber weggelassen. Jetzt kann man $\Delta t \to dt$ gehen lassen[23], wobei der Wert t^* so zwischen t und $t+\Delta t$ eingequetscht wird, daß man ihn gleich auf t setzen kann. Außerdem wird nun der Erwartungswert auf die einzelnen Terme der Summe angewandt:

$$\begin{aligned} J = \max\Big\{&\hat{U}(c(t),t)\,dt + J \\ &+ J_W\,E[dW] + J_t\,dt + \frac{1}{2}\,J_{WW}\,E\big[(dW)^2\big]\ \Big\}. \end{aligned} \tag{7.48}$$

Man kennt aber aus der Budgetgleichung die Ausdrücke für $E[dW]$ und $E[(dW)^2]$, Gleichung (7.29) und (7.31), die nun noch eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} J = \max\Big\{&\hat{U}\big(c(t),t\big)\,dt + J \\ &+ J_W\cdot\Big[W(t)\big(r_f + \mathbf{y}(t)'(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})\big) - c(t)\Big]dt \\ &+ J_t\,dt \\ &+ \frac{1}{2}\,J_{WW}\cdot(W(t))^2\,\mathbf{y}(t)'\mathbf{V}\mathbf{y}(t)\,dt\Big\}. \end{aligned} \tag{7.49}$$

Nun noch J auf beiden Seiten abziehen, durch dt teilen[24], und schon erhält man diese fundamentale Gleichung:

$$\boxed{0 = \max\ \Big\{\hat{U} + J_W\Big(W\big(r_f + \mathbf{y}'(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})\big) - c\Big) + J_t + \frac{1}{2}\,J_{WW}\,W^2\mathbf{y}'\mathbf{V}\mathbf{y}\Big\}} \tag{7.50}$$

oder ausführlicher, für alle t:

$$\begin{aligned} 0 = \max\ \Big\{&\hat{U}\big(c(t),t\big) + \frac{\partial J}{\partial W}(W(t),t)\Big(W(t)\big(r_f + \mathbf{y}(t)'(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})\big) - c(t)\Big) \\ &+ \frac{\partial J}{\partial t}\big(W(t),t\big) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}\big(W(t),t\big)\cdot(W(t))^2\,\mathbf{y}(t)'\mathbf{V}\mathbf{y}(t)\Big\}. \end{aligned} \tag{7.51}$$

[23] Der Fehlerterm $o(\Delta t)$ fällt dabei weg, es gilt sogar: $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, so daß auch die spätere „Division“ durch dt möglich ist.

[24] An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Mathematikern entschuldigen, denen heitere Multiplikationen und Divisionen mit und durch infinitesimalen Größen Magenkrämpfe bereiten, für strikte Herleitungen siehe Kushner [34, Kap. 4]

Nun ist also ein weiterer funktionaler Zusammenhang hergeleitet worden über die abgeleitete Nutzenfunktion J (eine zeitkontinuierliche Version der fundamentalen Bellman-Dreyfus Optimalitätsgleichung). Diese Gleichung muß zu jedem Zeitpunkt zutreffen, und sie verknüpft den abgeleiteten Nutzen mit der Konsumentscheidung und der Portfolioentscheidung zum Zeitpunkt t. Mittels gewöhnlicher Differentialrechnung kann man nun optimalen Konsum und Portfoliowahl finden.

Für optimale Konsumpläne $c(t)$ und Investitionspläne $\mathbf{y}(t)$ muß diese Gleichung (7.50) zu jedem Zeitpunkt t gelten, also der zu maximierende Ausdruck in Gleichung (7.51) tatsächlich ein Maximum haben (in Abhängigkeit von $c(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ zu dem Zeitpunkt).

Nun, dann müssen aber die ersten partiellen Ableitungen des Ausdrucks in geschweiften Klammern in der fundamentalen Gleichung (7.50) gleich Null sein – und damit kann man dann endlich $c(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ finden, also das Konsum- und Investitionsproblem lösen[25]. Um also schließlich $c(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ zu finden, muß der folgende Ausdruck aus Gleichung (7.50) als Funktion von $c(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ maximal sein:

$$\hat{U} + J_W\Big(W\big(r_f + \mathbf{y}'(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})\big) - c\Big) + J_t + \frac{1}{2}\,J_{WW}\,W^2\mathbf{y}'\mathbf{V}\mathbf{y},$$

da $\mathbf{y}$ und c zu einem festen beliebigen Zeitpunkt t die Kontrollvariablen sind, an denen gedreht wird, bezüglich derer also das Maximum gefunden werden soll, und $W(t)$ und t Parameter, von denen die Lösung abhängt.

Die partiellen Ableitungen sind dann[26]:

$$\frac{\partial \ldots}{\partial \mathbf{y}} = J_W\,W(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1}) + J_{WW}\,W^2\,\mathbf{V}\mathbf{y} \qquad \underset{J\times 1}{\overset{!}{=}} \mathbf{0} \tag{7.52}$$

$$\frac{\partial \ldots}{\partial c} = \hat{U}_c(c) - J_W \qquad \underset{1\times 1}{\overset{!}{=}} 0 \tag{7.53}$$

Kurz zur Interpretation: die letzte Gleichung besagt, daß der marginale Nutzen einer höheren Konsumrate (also marginaler Nutzen von jetzigem Konsum) gleich dem marginalen (abgeleiteten) Nutzen des zünftigen Vermögens ist, also dem Potential für späteren Konsum[27]. Hier fließt also der Aspekt der Zeit ein.

[25] Abhängig wohlgemerkt von der noch unbekannten Funktion $J(W(t), t)$. Für die kann man nach Einsetzen der Lösungen für $c(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ eine partielle Differentialgleichung finden, die man für bestimmte Fälle auch explizit lösen kann. (Man kennt ja die Endbedingung, daß $J(T) = B(T)$, und kann noch einige Randbedingungen angeben, daß z. B. der Nutzen eines Vermögens von Null auch Null ist, etc.)

[26] Nur die Abhängigkeit von den Variablen, nach denen differenziert wird, wird noch angegeben

[27] Oft als „envelope“-Gleichung bezeichnet.

Die erste Gleichung wägt für eine riskante Investition die Nutzensteigerung durch höheren Erwartungswert gegen den Nutzenverlust (Konsum, Varianz) ab.

Man kann dann Gleichung (7.52) nach $\mathbf{y}$ auflösen:

$$\mathbf{y}(t) = \frac{-J_W}{WJ_{WW}}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1}) \tag{7.54}$$

Nun sei noch das Arrow-Pratt Maß für die abgeleitete relative Risikoaversion definiert:

$$RRA^i(t) := \frac{-W^i(t)J^i_{WW}\big(W^i(t),t\big)}{J^i_W\big(W^i(t),t\big)} \tag{7.55}$$

Dies alles eingesetzt, und man bekommt die schöne Formel:

$$\boxed{\mathbf{y}^i(t) = \frac{1}{RRA^i(t)}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})} \tag{7.56}$$

Was bedeutet dies? Die Formel oben ergibt die Assetgewichte des riskanten Portfolios des Investors i. Das Bemerkenswerte ist, daß nur die Zahl $\frac{1}{RRA^i(t)}$ vom Investor abhängt, der Rest nicht. Alle Investoren wählen also das gleiche riskante Portfolio, wenn auch in unterschiedlichem Ausmaß. Bevor nun das Gewicht des risikolosen Assets berechnet wird, sei noch definiert, wie im zeitdiskreten CAPM auf Seite 58:

$$A := \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} \tag{7.57}$$

$$C := \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}. \tag{7.58}$$

Das sind Skalare, die nur abhängen vom Investitionsspektrum $\{r_f, \boldsymbol{\mu}, B\}$ (da ja $\mathbf{V} = BB'$), und da das Investitionsspektrum als konstant vorausgesetzt wurde, sind diese Skalare auch konstant.

Das Gewicht des risikolosen Assets und der riskanten Assets müssen sich ja zu eins ergänzen (Formel (7.2)), damit ist dann

$$y^i_f(t) = 1 - \frac{1}{RRA^i(t)}\mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1}) = 1 - \frac{A - r_fC}{RRA^i(t)}. \tag{7.59}$$

Jeder Investor wählt also wieder eine Kombination aus dem risikolosen und *einem* riskanten Portfolio, das für alle Investoren gleich ist: Zwei-Fonds-Separation tritt ein. Das Ausmaß der Risikoaversion bestimmt die Anteile im riskanten bzw. risikolosen Portfolio, und je größer die Risikoaversion, desto kleiner der Anteil im riskanten Portfolio.[28]

[28] Man bedenke, daß typischerweise im Gleichgewicht $r_f < \mu_{mvp} = A/C$, also $A > r_fC$ und damit $A - r_fC > 0$.

Man kann das optimale riskante Portfolio nun noch normieren, sei

$$\hat{\mathbf{y}}_r = \frac{\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})}{\mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})} = \frac{\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})}{A - r_f C}. \tag{7.60}$$

Damit gilt dann der

Satz 21 (Zwei-Fonds-Separation). *Es gibt zwei Fonds, nämlich das risikolose Asset und ein ausschliesslich riskantes Portfolio r, so daß für jeden Investor i das optimale Portfolio eine Kombination aus diesen beiden Fonds ist: Mit* $\lambda^i := \frac{A - r_f C}{RRA^i(t)}$ *wählt der Investor i das riskante Portfolio*

$$\mathbf{y}^i = \lambda^i \hat{\mathbf{y}}_r \tag{7.61}$$

und einen Anteil des risikolosen Assets y^i_f *von* $1 - \lambda^i$.

Die optimale Konsumrate

Damit ist das Problem der Portfoliowahl gelöst (vorausgesetzt, man hat im konkreten Fall nach J aufgelöst). Wie sieht es mit dem Konsum aus?

Nun, die Nutzenfunktion $\hat{U}$ ist nach Annahme 7.1.9 differenzierbar mit streng monotoner erster Ableitung, und dann kann man Gleichung (7.53) eindeutig auflösen zu

$$c^*(t) = U_C^{-1}(J_W(W(t), t)). \tag{7.62}$$

7.3 Marktportfolio und Gleichgewicht

Nun folgt die CAPM-Gleichung wieder ganz zwanglos, denn für alle Zeitpunkte t ergibt sich das riskante Marktportfolio als gewichtete Summe der einzelnen riskanten Portfolios zu

$$\mathbf{y}^m = \sum_i \frac{W^i}{W^m}\mathbf{y}^i \tag{7.63}$$

$$= \frac{1}{W^m}\sum_i \frac{W^i}{RRA^i}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1}) \tag{7.64}$$

Nun sei wieder ein aggregiertes Risikoaversionsmaß gebildet,

$$\frac{W^m}{RRA^m} := \frac{1}{ARA^m} := \sum_i \frac{1}{ARA^i} = \sum_i \frac{W^i}{RRA^i} \tag{7.65}$$

damit ist dann

$$\mathbf{y}^m = \frac{1}{RRA^m}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1}), \qquad \text{also} \tag{7.66}$$

$$\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1} = RRA^m\,\mathbf{V}\mathbf{y}^m, \tag{7.67}$$

für ein einzelnes Wertpapier j also

$$\mu_j = r_f + RRA^m \sum_k v_{jk} y_k^m = r_f + RRA^m \sigma_{mj}. \tag{7.68}$$

Damit hat man einen Ausdruck für die erwartete sofortige Rendite eines Assets, allerdings als Funktion des noch unbekannten aggregierten Risikomaßes. Man kann nun, wie in Abschnitt 6.3 auf Seite 109 in Jarrows Gleichgewichts-CAPM, dieses Risikomaß herausfinden, indem man den die riskanten Assets des Marktportfolios betrachtet, also mit $\mathbf{y}^m$ multipliziert:

$$\mathbf{y}^{m\,\prime}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1}) = RRA^m\, \mathbf{y}^{m\,\prime} \mathbf{V} \mathbf{y}^m \tag{7.69}$$

Dann addiert[29] man links noch $0 = y_f^m (r_f - r_f)$ und erhält[30]

$$\mathbf{y}^{m\,\prime}\boldsymbol{\mu} + y_f^m r_f - r_f(\mathbf{y}^{m\,\prime}\mathbf{1} + y_f^m) = RRA^m \mathbf{y}^{m\,\prime} \mathbf{V} \mathbf{y}^m \tag{7.70}$$

$$\mu_m - r_f = RRA^m \sigma_m^2, \qquad \text{damit} \tag{7.71}$$

$$RRA^m = \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_m^2}. \tag{7.72}$$

Man hat also das aggregierte Risikomaß gefunden, als Funktion des (hier konstanten) Investitionsspektrums und des Marktportfolios. Es handelt sich um den Preis des Risikos. Einsetzen in 7.68 ergibt unmittelbar:

$$\mu_j = r_f + \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_m^2} \sigma_{mj}, \tag{7.73}$$

und definiert man wieder $\beta_{jm} = \frac{\sigma_{mj}}{\sigma_m^2}$, dann erhält man schließlich wieder die bekannte CAPM-Gleichung:

Satz 22 (Wertpapiermarktlinie). *Die erwartete sofortige Rendite eines Assets j übersteigt die sofortige risikolose Rendite um einen Betrag, der linear mit dem Beta des Assets relativ zum Gesamtmarkt zusammenhängt.*

$$\boxed{\mu_j = r_f + \beta_{jm}(\mu_m - r_f).} \tag{7.74}$$

Trägt man also die erwartete sofortige Rendite als Funktion der Kovarianz zum Markt auf, erhält man eine gerade Linie: Die Wertpapiermarktlinie.

7.4 Stochastisches Investitionsspektrum

Wie oben gesehen, kann man im zeitkontinuierlichen Fall das bekannte CAPM herleiten, ohne die unrealistischen Annahmen der μ-σ-Präferenzen und der Beschränkung auf eine Periode einführen zu müssen.

Man benutzt aber eine wenigstens ebenso unrealistische Annahme, nämlich die des konstanten Investitionsspektrums. Zumindest eine Komponente, nämlich der risikolose sofortige Zins, ist aber empirisch beobachtbar und ganz sicher nicht konstant.

Man kann das Modell erweitern, indem man das Investitionsspektrum nicht konstant wählt, sondern als Funktion von Zustandsvariablen, die sich im Verlauf der Zeit ändern, durchaus auch mit stochastischer Komponente. Hier soll nun nicht die ganze Rechnung durchgeführt werden, sondern nur kurz das Hauptresultat aufgezeigt werden.

Drei-Fonds-Separation

Sei das Investitionsspektrum also abhängig von einer Zustandsvariablen, die hier zur Vereinfachung ein Assetpreis ist, nämlich der Preis des Assets $j = Z$. Das Investitionsspektrum ist also $\{r_f(t, \tilde{p}_Z(t)), \boldsymbol{\mu}(t, \tilde{p}_Z(t)), B(t, \tilde{p}_Z(t))\}$.

Dann wählt jeder Investor nicht mehr zwischen zwei Fonds, sondern zwischen drei, es gilt:

Satz 23 (Drei-Fonds-Separation). *Es gibt drei Fonds, konstruiert aus risikolosem Asset, dem Marktportfolio, und dem Asset Z, so daß für jeden Investor i das optimale Portfolio eine Kombination aus diesen drei Fonds ist.*

Diese drei Fonds können gefunden werden ohne Betrachtung der Risikopräferenzen (oder Anfangsausstattung) der Investoren.

Wertpapiermarktebene

Außerdem gibt es jetzt nicht nur ein Risikomaß, sondern zwei, und alle Wertpapiere liegen nicht mehr auf einer eindimensionalen Wertpapiermarktlinie, sondern einer zweidimensionalen Wertpapiermarktebene:

Satz 24 (Wertpapiermarktebene). [31] *Die erwartete sofortige Rendite eines Assets j übersteigt die sofortige risikolose Rendite um einen Betrag, der linear vom Beta des Assets relativ zum Gesamtmarkt abhängt, und linear vom Beta des Assets relativ zum Asset Z.*

$$\boxed{\mu_j = r_f + \beta_{jm}(\mu_m - r_f) + \beta_{jZ}(\mu_Z - r_f),} \tag{7.75}$$

wobei alle diese Werte nun von der Zeit und der Zustandsvariablen $p_Z(t)$ abhängen.

Trägt man die erwartete sofortige Rendite als Funktion der Betas auf, erhält man eine Ebene: Die Wertpapiermarktebene.

[31] Beweis in Jarrow [31] oder Merton [46].

Die Definition der Betas ist hier modifiziert, nämlich

$$\beta_{jZ} = \frac{\sigma_{Zm}\sigma_{jm} - \sigma_{jZ}\sigma_m^2}{(\sigma_{Zm})^2 - \sigma_Z^2\sigma_m^2} \tag{7.76}$$

$$\beta_{jm} = \frac{\sigma_{Zm}\sigma_{jZ} - \sigma_{jm}\sigma_Z^2}{(\sigma_{Zm})^2 - \sigma_Z^2\sigma_m^2}. \tag{7.77}$$

Die erwartete sofortige Rendite eines Assets ist also die momentane risikofreie Rendite, plus Marktbeta mal erwarteter Marktüberrendite, plus Beta relativ zu Z mal erwarteter Überrendite von Z.

Ein Asset hat also zwei systematische Risikokomponenten: Das Risiko bezüglich des Marktes, und das Risiko bezüglich Bewegungen in der Zustandsvariablen. Der Investor legt daher in drei Portfolios an: Dem risikolosen und dem Markt, um auf den Portfoliorand zu kommen, und einem weiteren, um sich vor ungünstigen Verschiebungen der Zustandsvariablen abzusichern. Wenn die Zustandsvariable kein Assetpreis ist, wird hierzu ein Fonds gewählt werden, der möglichst stark korreliert ist mit der Zufallsvariablen.

Die Zustandsvariable ist also die einzige Risikoquelle neben dem Gesamtmarkt. Das Risiko, das den Wienerprozessen inhärent ist, wird – wie im einperiodigen CAPM – diversifiziert, und ist nicht bewertungsrelevant. Bewertungsrelevant ist die Kovarianz zum Markt, und zu anderen Risikoquellen, die das Investitionsspektrum verschieben.

Dies läßt sich analog auf noch mehr Dimensionen erweitern: Hat man n Zustandsvariablen, so erhält man $(n+2)$-Fonds-Separation und eine $(n+1)$-dimensionale Wertpapiermarkthyperebene mit ebensovielen Betas.

Anhang A

Formeln und Beweise

A.1 Formeln für den Portfoliorand

A.1.1 Randportfolios

Preliminarien

J	Zahl der Basiswertpapiere
$\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_j, \ldots, \tilde{r}_J)'$	Vektor der stochastischen Assetrenditen

Gegeben:

$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^J$	Vektor der Renditeerwartungswerte mit $\boldsymbol{\mu} = E[\tilde{\mathbf{r}}]$
$\mathbf{V}_r \in \mathbb{R}^{J \times J}$	Kovarianzmatrix der Renditen mit $\mathbf{V}_r = E[(\tilde{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\mu})(\tilde{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\mu})']$

Gesucht:

$\hat{\mathbf{y}}_\mu$	Gewichte eines normierten Portfolios mit Erwartungswert μ und minimaler Varianz, (mit $\hat{\mathbf{y}}_\mu{}'\mathbf{1} = 1$)

Erwartungswert und Varianz der Rendite eines Portfolios

$$\mu_p = E[\tilde{r}_p] = E[\hat{\mathbf{y}}_p{}'\tilde{\mathbf{r}}] = \hat{\mathbf{y}}_p{}'E[\tilde{\mathbf{r}}] = \hat{\mathbf{y}}_p{}'\boldsymbol{\mu} \tag{A.1}$$

$$\sigma_p^2 = Var[\tilde{r}_p] = E[(\hat{\mathbf{y}}_p{}'\tilde{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{y}}_p{}'\boldsymbol{\mu})^2] = \hat{\mathbf{y}}_p{}'\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{y}}_p \tag{A.2}$$

Das Optimierungsproblem

Das Randportfolio mit Erwartungswert μ (bzw. dessen Gewichtungsvektor $\hat{\mathbf{y}}_\mu$) ergibt sich als Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^J} \quad \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{y}} \tag{A.3}$$

$$\text{udN} \quad \hat{\mathbf{y}}'\boldsymbol{\mu} = \mu \tag{A.4}$$

$$\hat{\mathbf{y}}'\,\mathbf{1} = 1 \tag{A.5}$$

Gegeben $\mathbf{V}_r$ und $\boldsymbol{\mu}$, definiert man die Skalare A, B, C, D wie folgt:

$$
\begin{aligned}
& A = \mathbf{1}'\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1} && \text{(A.6)}\\
0 < \quad & B = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu} && \text{(A.7)}\\
0 < \quad & C = \mathbf{1}'\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1} = \text{Summe aller Elemente von } \mathbf{V}_r^{-1} && \text{(A.8)}\\
0 < \quad & D = BC - A^2 && \text{(A.9)}
\end{aligned}
$$

dann kann man diese Lösungen $\hat{\mathbf{y}}_\mu$ so schreiben:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{y}}_\mu &= \overbrace{\left(\frac{C \cdot \mu - A}{D}\right)}^{\lambda} \mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu} \quad + \quad \overbrace{\left(\frac{B - A \cdot \mu}{D})\right)}^{\gamma} \mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1} && \text{(A.10)}\\
&= \underbrace{\frac{1}{D}\left[B(\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1}) - A(\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu})\right]}_{\hat{\mathbf{g}}} \quad + \quad \underbrace{\frac{1}{D}\left[C(\mathbf{V}_r^{-1}\boldsymbol{\mu}) - A(\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1})\right]}_{\mathbf{h}} \cdot \mu && \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

Damit liegen alle $\hat{\mathbf{y}}$ auf einer Linie im Assetraum:

$$
\hat{\mathbf{y}}_\mu = \hat{\mathbf{g}} + \mathbf{h} \cdot \mu \tag{A.12}
$$

Jede gewichtete Linearkombination von Randportfolios ist ein Randportfolio (dessen Erwartungswert gleich der gewichteten Kombination der anderen Erwartungswerte ist):

$$
\begin{aligned}
& \sum_i \alpha_i = 1 \ \wedge \ \hat{\mathbf{y}}_i \text{ sind Randportfolios} && \text{(A.13)}\\
\Rightarrow \quad & \sum_i \alpha_i \hat{\mathbf{y}}_i = \sum_i \alpha_i(\hat{\mathbf{g}} + \mathbf{h}\mu_i) && \text{(A.14)}\\
& = \hat{\mathbf{g}} + \mathbf{h}\sum_i \alpha_i\mu_i && \text{(A.15)}\\
& = \text{ein Randportfolio mit } \mu = \sum_i \alpha_i\mu_i && \text{(A.16)}
\end{aligned}
$$

A.1.2 Kovarianz, Varianz, Korrelation

Kovarianz

Für alle Randportfolios p und alle Portfolios q:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{pq} = cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) &= \hat{\mathbf{y}}_p{}'\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{y}}_q = \lambda_p \cdot \mu_q + \gamma_p && \text{(A.17)}\\
&= C/D(\mu_p - A/C)(\mu_q - A/C) + 1/C && \text{(A.18)}\\
&= 1/D(C\mu_p\mu_q - A(\mu_p + \mu_q) + B) && \text{(A.19)}
\end{aligned}
$$

Varianz

Für alle Randportfolios p:

$$\sigma_p^2 = cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_p) = \hat{\mathbf{y}}_p{}' \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{y}}_p = \lambda_p \cdot \mu_p + \gamma_p \tag{A.20}$$

$$= 1/D(C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B) \tag{A.21}$$

$$= C/D(\mu_p - A/C)^2 + 1/C \quad \geq \frac{1}{C} \tag{A.22}$$

Erwartungswert

Für alle Randportfolios p:

$$\mu_p = E[\tilde{r}_p] = A/C \pm \sqrt{D/C(\sigma_p^2 - 1/C)} \tag{A.23}$$

Zusammenhang zwischen Erwartungswert und Varianz, Steigung

$$C\sigma_p^2 - C^2/D(\mu_p - A/C)^2 = 1 \tag{A.24}$$

Totales Differential:

$$2C\sigma_p\, d\sigma_p - 2C^2/D(\mu_p - A/C)\, d\mu_p = 0 \tag{A.25}$$

Daraus ergibt sich die Steigung des Portfoliorands in der μ-σ-Ebene:

$$\frac{d\mu_p}{d\sigma_p} = \frac{D\sigma_p}{C\mu_p - A} \tag{A.26}$$

Korrelation

Für alle Randportfolio p und beliebiges Portfolio q:

$$\rho_{qp} = cor(\tilde{r}_q, \tilde{r}_p) = \frac{\sigma_{qp}}{\sigma_q \cdot \sigma_p} = \frac{\hat{\mathbf{y}}_q \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{y}}_p}{\sqrt{\hat{\mathbf{y}}_q \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{y}}_q \cdot \hat{\mathbf{y}}_p \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{y}}_p}} \tag{A.27}$$

$$= \frac{\mu_q \cdot (C\mu_p - A) - A\mu_p + B}{\sigma_q \sqrt{(C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B)}} \tag{A.28}$$

$$= \frac{\sigma_p \left(\mu_q - \mu_{zc(p)}\right)}{\sigma_q \left(\mu_p - \mu_{zc(p)}\right)} \tag{A.29}$$

und, falls auch q ein Randportfolio ist,

$$= \frac{\sigma_{qp}}{\sqrt{\sigma_{qp}^2 + \frac{(\mu_p - \mu_q)^2}{D}}} \tag{A.30}$$

A.1.3 Portfolio global minimaler Varianz, Nullkovarianzportfolio

Portfolio global minimaler Varianz

$$\mu_{mvp} = E[\tilde{r}_{mvp}] = A/C = \frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1}} = A\sigma^2_{mvp} \tag{A.31}$$

$$\sigma^2_{mvp} = Var[\tilde{r}_{mvp}] = 1/C = \frac{1}{\mathbf{1}'\mathbf{V}_r^{-1}\mathbf{1}} = \frac{1}{\text{Summe aller Elemente von } \mathbf{V}_r^{-1}} \tag{A.32}$$

Kovarianz mit dem Portfolio global minimaler Varianz

Für *alle* Portfolios q (nicht nur Randportfolios) gilt:

$$\sigma_{q,mvp} = cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_{mvp}] = 1/C = \frac{1}{\text{Summe aller Elemente von } \mathbf{V}_r^{-1}} \tag{A.33}$$

Herleitung des Nullkovarianzportfolios

Setze die Kovarianz zweier Randportfolios gleich null:

$$\sigma_{p,zc(p)} = cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_{zc(p)}) = \frac{C}{D}(\mu_p - \frac{A}{C})(\mu_{zc(p)} - \frac{A}{C}) + \frac{1}{C} \overset{!}{=} 0 \tag{A.34}$$

Eigenschaften des Nullkovarianzportfolios

Zu jedem Randportfolio p außer mvp gibt es genau ein Randportfolio $zc(p)$, mit dem es eine Kovarianz von 0 hat.

Das Nullkovarianzportfolio eines Nullkovarianzportfolios ist das ursprüngliche Portfolio:

$$\hat{\mathbf{y}}_{zc(zc(p))} = \hat{\mathbf{y}}_p \quad (\Rightarrow \quad \mu_{zc(zc(p))} = \mu_p) \tag{A.35}$$

Falls das Randportfolio p effizient ist, dann ist das Nullkovarianzportfolio $zc(p)$ ineffizient und umgekehrt:

$$\mu_p > \mu_{mvp} \iff \mu_{zc(p)} < \mu_{mvp} \tag{A.36}$$

Beta bezüglich des Nullkovarianzportfolios

Für alle Randportfolio p und beliebiges Portfolio q:

$$\beta_{q,zc(p)} = 1 - \beta_{q,p} \tag{A.37}$$

Renditenerwartungswert des Nullkovarianzportfolios

$$\begin{aligned}
\mu_{zc(p)} &= A/C - \frac{D/C^2}{\mu_p - A/C} && \text{(A.38)} \\
&= \mu_{mvp} - \frac{\sigma^2_{mvp}\, D/C}{\mu_p - \mu_{mvp}} && \text{(A.39)} \\
&= \mu_p - \frac{\sigma^2_p\, D/C}{\mu_p - \mu_{mvp}} && \text{(A.40)} \\
&= \frac{\mu_{mvp}\, \sigma^2_p - \mu_p\, \sigma^2_{mvp}}{\sigma^2_p - \sigma^2_{mvp}} && \text{(A.41)}
\end{aligned}$$

A.1.4 Beta

Für alle Randportfolio p und beliebiges Portfolio q:

$$\beta_{q,p} = \frac{\sigma_{qp}}{\sigma^2_p} = \frac{cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_p]}{Var[\tilde{r}_p]} = \frac{\hat{\mathbf{y}}_q{}'\, \mathbf{V}_r\, \hat{\mathbf{y}}_p}{\hat{\mathbf{y}}_p{}'\, \mathbf{V}_r\, \hat{\mathbf{y}}_p} \tag{A.42}$$

A.2 Beweis für Satz 7

Der Satz lautet:

Es gebe einen vollkommenen Markt, Annahme 3.2.2, mit dem risikolosen und wenigstens zwei riskanten Assets, Annahme 3.2.1. Ein Investor habe Präferenzen über (nichtnormierte) Portfolios $\mathbf{n} \in \mathcal{Y}$ daraus, und seine Präferenzen erfüllen Annahmen 3.1.1 bis 3.1.4.[1]. Genau dann, wenn der Investor auch strenge Monotonie im risikolosen Asset 3.2.2 und strenge Varianzaversion 3.2.3 aufweist, dann zeigt er μ-σ-Präferenz, d. h. die Nutzenfunktion $U_{\mathcal{Y}}$ läst sich schreiben als:

$$U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{n}) = U_{\mu\sigma}(\mathbf{n}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{n}'\mathbf{V}_x\mathbf{n}),$$

wobei $U_{\mu\sigma}$ streng monoton steigend in der ersten und streng monoton fallend in der zweiten Variablen ist.

Zum Beweis[2] muß erst die Notwendigkeit gezeigt werden: Wenn der Investor μ-σ-Präferenz zeigt (mit den Vorzeichen der Ableitungen wie im Satz), dann auch strenge Monotonie im risikolosen Asset und strenge Varianzaversion. Das ist trivial.

Schwieriger ist die umgekehrte Richtung:

Der Beweis, daß die beiden Verhaltensannahmen hinreichend sind für μ-σ-Präferenz. Dazu muß gezeigt werden, daß, wenn zwei beliebige Portfolios $\mathbf{n}_0$ und $\mathbf{n}_1$ in Erwartungswert und Varianz übereinstimmen, dann der Investor zwischen ihnen indifferent ist, also $U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{n}_0) = U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{n}_1)$.

Gegeben also zwei Portfolios $\mathbf{n}_0$ und $\mathbf{n}_1$ mit gleichem Erwartungswert und Varianz. Jetzt sei ein stetig differenzierbarer Pfad $\mathbf{n}(t)$ im Assetraum vom Portfolio n_0 zum Portfolio n_1 gegeben, eine Abbildung $[0,1] \mapsto \mathcal{Y}$. Dieser Pfad habe konstanten Erwartungswert und konstante Varianz, d. h. der Pfad liegt auf einer Isomearenhyperebene und einem Isovarianzellipsoid.

Der Erwartungswert der Auszahlung eines Portfolios $\mathbf{n}$ ist $E[\tilde{x}_n] = \mathbf{n}'\boldsymbol{\mu}_x$, und die Varianz der Auszahlung $Var[\tilde{x}_n] = \mathbf{n}'\mathbf{V}_x\mathbf{n}$, also:

[1] Es gibt also eine kardinale Nutzenfunktion $U_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R}$

[2] Aus der Dissertation von Löffler [39].

- $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}_0$ und $\mathbf{n}(1) = \mathbf{n}_1$,
- $\mathbf{n}(t)'\boldsymbol{\mu}_x = const = \mathbf{n}_0'\boldsymbol{\mu}_x = \mathbf{n}_1'\boldsymbol{\mu}_x$
- $\mathbf{n}(t)'\mathbf{V}_x\mathbf{n}(t) = const = \mathbf{n}_0'\mathbf{V}_x\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_1'\mathbf{V}_x\mathbf{n}_1$.

Solch ein Pfad existiert stets, wenn der Assetraum mehr als zwei Dimensionen hat, und alle Portfolios enthalten sind[3], denn im $J+1$-dimensionalen Assetraum (mit risikolosem Asset) ist eine isomeare Ebene ein J-dimensionaler Teilraum, und ein Isovarianzellipsoid darin offenbar eine zusammenhängende Menge für $J \geq 2$.

Da der Erwartungswert entlang des Pfades konstant ist, gilt[4]

$$\frac{d}{dt}E[\tilde{x}_{n(t)}] = \frac{d}{dt}[\mathbf{n}(t)'\boldsymbol{\mu}_x] = 0 \tag{A.43}$$

und damit

$$= \left(\frac{d\mathbf{n}(t)}{dt}\right)'\boldsymbol{\mu}_x = \dot{\mathbf{n}}(\mathbf{t})'\boldsymbol{\mu}_x = E[\tilde{x}_{\dot{n}(t)}] = 0, \tag{A.44}$$

Anfangs- und Endportfolios haben im allgemeinen unterschiedliche Anteile des $j$ten Asset, also ändert sich $n_j(t)$. Die Ableitung dieses Anteils bestimmt nun gerade, wieviele Einheiten von Asset j im Portfolio $\dot{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ enthalten sind, es gibt also anschaulich die Richtung an, in der sich der Punkt auf dem Pfad gerade bewegt. Wie gerade gezeigt, ist der Erwartungswert der Auszahlung dieses Richtungsportfolios Null.

Ebenso gilt, da die Varianz entlang des Pfades konstant ist,

$$\frac{d}{dt}Var[\tilde{x}_{n(t)}] = \frac{d}{dt}[\mathbf{n}(t)'\mathbf{V}_x\mathbf{n}(t)] = 0 \tag{A.45}$$

und damit, da $\mathbf{V}_x$ symmetrisch ist, mit der Kettenregel[5]:

$$= \dot{\mathbf{n}}(\mathbf{t})'\mathbf{V}_x\mathbf{n}(t) = cov[\tilde{x}_{\dot{n}(t)}, \tilde{x}_{n(t)}] = 0. \tag{A.46}$$

Damit gilt aber, daß $\dot{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ ein Störportfolio relativ zu $\mathbf{n}(t)$ ist entlang des ganzen Pfades, da es einen Erwartungswert und Kovarianz (zu $\mathbf{n}(t)$) von Null hat, aber, da $\mathbf{n}_0 \neq \mathbf{n}_1$, nicht konstant Null ist.

Also gilt, da der Investor strikt risikoavers ist:

$$U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{n}(t)) > U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{n}(t) + \dot{\mathbf{n}}(\mathbf{t})) \tag{A.47}$$

Sei nun folgende Hilfsfunktion betrachtet:

$$g(\alpha) := U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{n}(t) + \alpha \cdot \dot{\mathbf{n}}(\mathbf{t})) \tag{A.48}$$

[3]Es reicht wie gesagt, wenn die Portfolios einen konvexen Kegel bilden, womit auch Leerverkaufsbeschränkungen erfaßt sind, aber der Fall wird hier nicht behandelt.

[4]Der Punkt symbolisiert wie in der Physik üblich die Ableitung nach der Zeit, $\dot{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ ist also ein Vektor, dessen $j$es Element die Ableitung nach der Zeit des $j$ten Elements von $\mathbf{n}(t)$ ist. (Der Strich bezeichnet Transposition, $\mathbf{n}'$ ist also ein Zeilenvektor.)

[5]Es ist $\mathbf{n}(t)'\mathbf{V}_x\mathbf{n}(t)$ zunächst eine Funktion von $\mathbf{n}(t)$. Die Ableitung nach t ist also die Ableitung dieser Funktion nach $\mathbf{n}(t)$ (nämlich $(\mathbf{V}_x + \mathbf{V}_x')\mathbf{n}(t)$) mal der Ableitung von $\mathbf{n}(t)$ nach t (nämlich $\dot{\mathbf{n}}(t)$).

Varianzaversion impliziert, daß dieser Nutzen ein Maximum hat, wenn das Störportfolio möglichst klein ist, d. h. bei $\alpha = 0$. Dazu muß die erste Ableitung nach α an der Stelle $\alpha = 0$ Null sein. Diese Ableitung ist[6]:

$$\frac{dg(\alpha)}{d\alpha} = [\nabla U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{n}(t) + \alpha \cdot \dot{\mathbf{n}}(\mathbf{t}))]' \cdot \dot{\mathbf{n}}(\mathbf{t}), \tag{A.49}$$

und es muß also gelten

$$\left.\frac{dg(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = [\nabla U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{n}(t))]' \cdot \dot{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) \stackrel{!}{=} 0. \tag{A.50}$$

$$\tag{A.51}$$

Nun sei die Differenz zwischen $U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{n}_0)$ und $U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{n}_1)$ berechnet, und da $U_{\mathcal{Y}}$ nach Annahme ein stetig differenzierbares Potential ist, gilt

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{n}_0) - U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{n}_1) &= \int_{\mathbf{n}(0)=\mathbf{n}_0}^{\mathbf{n}(1)=\mathbf{n}_1} dU_{\mathcal{Y}}(n(t)) && \text{(A.52)} \\ &= \int_{\mathbf{n}(0)=\mathbf{n}_0}^{\mathbf{n}(1)=\mathbf{n}_1} [\nabla U_{\mathcal{Y}}(\mathbf{n}(t))]' \cdot \dot{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) dt && \text{(A.53)} \\ &= \int_{\mathbf{n}(0)=\mathbf{n}_0}^{\mathbf{n}(1)=\mathbf{n}_1} 0 \, dt \quad = 0. && \text{(A.54)} \end{aligned}$$

Damit liegen also zwei beliebige $\mathbf{n}_0$ und $\mathbf{n}_1$ mit gleichem Erwartungswert und Varianz auch auf einer Indifferenzfläche im Assetraum, qed.

[6]Der Nabla-Operator ∇ berechnet den Gradienten der Funktion, also den Vektor aller partiellen Ableitungen.

Anhang B

Glossar

Brutto- und Nettoangebot Das Nettoangebot eines Assets ist Quantität, in der er tatsächlich da ist, das ist die Differenz zwischen allen verkauften Quantitäten des Assets und allen (Beträgen der) leerverkauften Quantitäten des Assets. Das Bruttoangebot hingegen ist nur der Subtrahend dieser Differenz.

Gibt es also z. B. 1000 Aktien und haben Investoren 200 zusätzlich leerverkauft, dann ist das Nettoangebot 1000, das Bruttoangebot 1200.

Finanzielle Assets sind Assets mit einem Nettoangebot von Null, z. B. Optionen: es werden so viele Otionen gekauft wie verkauft, und wenn alle zurückgegeben würden, wären keine mehr da. Finanzielle Assets produzieren also keine Nettoauszahlungen, sondern verteilen nur, während Assets mit positivem Nettoangebot tatsächlich eine Nettoauszahlung ungleich Null haben (es sei denn, die Rendite ist minus eins).

Das Portfolio eines individuellen Investors kann natürlich ein Asset in negativer Zahl halten, z. B. einige Aktien leerverkauft haben.

Im Marktportfolio müssen aber natürlich alle nichtfinanziellen Assets in positiver Zahl enthalten sein.

Das Nettoangebot an Asset j ist also $\sum_{i=1}^{I}(n_j^i)$, das Bruttoangebot $\sum_{i=1}^{I}(n_j^i)^+$.[1]

Investitionsspektrum Das Investitionsspektrum (investment opportunity set) zu einem Zeitpunkt t beschreibt die Investitionsmöglichkeiten, die ein Investor hat, indem es die derzeitigen Werte für Drift und Volatilität der Renditenprozesse der Assetpreise angibt, zusammengefaßt in $\{r_f, \mu, B\}$. Diese Parameter können konstant sein, von einem Parameter abhängen, oder von mehreren Parametern, einem Zustandsvektor, der selber einem Itô-Prozess unterworfen sein kann.

Itôs Lemma Gegeben ein stochastischer Itô-Prozeß[2]

[1] mit $(n)^+ := \begin{cases} n & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

[2] Hierbei ist $d\tilde{z}$ ein gewöhnlicher Wiener-Prozeß, α der Drift des Itô-Prozesses (also die erwartete Änderung pro Zeiteinheit), und σ die Volatilität des Itô-Prozesses (also ein Maß für die Unregelmäßigkeit, je größer σ, desto mehr Einfluß hat der stochastische Wiener-

$$d\tilde{x}_t = \alpha(\tilde{\mathbf{s}}(t))\,dt + \sigma(\tilde{\mathbf{s}}(t))\,d\tilde{z}_t \tag{B.1}$$

und eine zweifach differenzierbare Funktion $F(X,t)$. Dann gilt[3], wenn man zur Vereinfachung $\alpha_t := \alpha(\tilde{\mathbf{s}}(t))$ und $\sigma_t := \sigma(\tilde{\mathbf{s}}(t))$ schreibt:

$$\begin{aligned} dF(\tilde{x}_t,t) &= \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_t}\,d\tilde{x}_t + \frac{\partial F}{\partial t}\,dt + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{x}_t^2}\,(d\tilde{x}_t)^2 && \text{(B.2)} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \alpha_t\,\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_t} + \frac{1}{2}\,\sigma_t^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{x}_t^2}\right) dt + \sigma_t\,\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_t}\,dz_t. && \text{(B.3)} \end{aligned}$$

Heuristisch ist es so zu verstehen, daß man zunächst eine mehrdimensionale Taylorreihenentwicklung in finiter Entfernung um einen Punkt vornimmt. Bei der normalen Ableitung kann man bei Grenzübergang zu infiniten Größen Ordnungen größer eins ignorieren und erhält $dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt$. Hier sind aber stochastische Größen involviert, d. h. man bildet zunächst den Erwartungswert.

Die Erwartungswerte der dz verschwinden, da die Wienerprozesse Martingale sind, also ihre erwartete Änderung null ist. Damit fällt bei Wienerprozessen die erste Ordnung weg. Die zweite Ordnung allerdings nicht: $E\big[(dz)^2\big]$ ist ja gerade der Varianz des stochastischen Prozesses, und die soll ja gerade nicht null sein, sonst wäre der Prozess ja nicht stochastisch. Vielmehr ist, wie definiert, die Varianz proportional dt, also wird der Term der Taylorreihenentwicklung mit der zweiten Ableitung benutzt, und $(dz)^2$ mittels Erwartungswertbildung durch dt ersetzt.

Man kann, einfacher gesagt, formal so rechnen, als habe dz die Ordnung $dt^{\frac{1}{2}}$, und einfach alle Terme mit Ordnung größer 1 weglassen, weil sie bei Division durch dt und Grenzwertbildung für $dt \to 0$ verschwinden.

Bei Erwartungswertbildung im mehrdimensionalen Fall gilt ebenso, daß die Erwartungswerte der $dt\,dt$ bleiben, da sie nichtstochastisch sind, die Erwartungswerte der dz gleich 0 sind, da die Wienerprozesse keinen Drift haben, die Erwartungswert der $(dz)^2$ gegen dt gehen, da die Varianz nicht verschwindet, sondern proportional dt ist, und die Kreuzprodukte alle verschwinden, sowohl $dzdt$, da die Ordnung größer eins ist, als auch $dz_1 dz_2$, da die Wienerprozesse als unkorreliert angenommen werden.

Im mehrdimensionalen Fall, wenn J Prozesse von F Wienerprozessen getrieben werden, schreibt man wie folgt:

$$\underset{J\times 1}{d\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{t}}} = \underset{J\times 1}{\boldsymbol{\alpha}}\,(\tilde{\mathbf{s}}(t))\,dt + \underset{J\times F}{B}\,(\tilde{\mathbf{s}}(t))\,d\underset{F\times 1}{\tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{t}}}\,. \tag{B.4}$$

---

prozeß, desto zackiger wird der Itô-Prozeß). Drift α und Volatilität σ müssen gewissen Regularitätsbedingungen unterliegen, auf die hier nicht weiter eingegangen wird.

Drift und Volatilität hängen ab von einem allgemeinen Zustandsvektor, d. h. einem Vektor $\tilde{\mathbf{s}}(t)$, der beliebige Variablen enthalten kann, z. B. $\tilde{x}$ selber, die Zeit, oder andere Einflußgrößen, wie z. B. den kurzfristigen Zins. Typischerweise wird $\tilde{\mathbf{s}}(t) = (\tilde{x}(t), t)'$ betrachtet.

Wenn Drift und Volatilität nicht von der Zeit direkt abhängen, sondern Funktionen sind nur von $\tilde{x}$, dann wird der Itô-Prozeß eine (zeithomogene) Itô-Diffusion genannt.

[3] im Sinne mittlerer quadratischer Konvergenz

B ist eine Matrix, die nicht konstant sein muß, in der Eintrag b_{jf} angibt, wie stark der Wienerprozeß f auf die $j$te Variable einwirkt. Außerdem seien die F Wienerprozesse unabhängig, d. h.

$$d\tilde{z}_i \, d\tilde{z}_j = \begin{cases} dt & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \Rightarrow d\tilde{\mathbf{z}} \, d\tilde{\mathbf{z}}' = \mathbf{I}dt. \tag{B.5}$$

Instantane Erwartungswerte und Kovarianzen sind dann:

$$E[d\tilde{\mathbf{x}}_t] = \boldsymbol{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}_t, t) \, dt \tag{B.6}$$

$$E\big[(d\tilde{\mathbf{x}}_t)(d\tilde{\mathbf{x}}_t)'\big] = E\Big[(Bd\tilde{\mathbf{z}})(Bd\tilde{\mathbf{z}})'\Big] = BB'dt =: V dt \tag{B.7}$$

Damit kann man nun eine mehrdimensionale Variante Itôs Lemma angeben, wobei hier Abhängigkeit der Funktion von der Zeit der Einfachheit halber weggelassen wird: Gegeben J stochastische Prozesse wie in (B.4) (wobei $d\tilde{\mathbf{z}}$ gewöhnliche unabhängige Wienerprozesse sind und eine zweifach differenzierbare Funktion $F(\tilde{\mathbf{x}})$. Dann gilt, wenn man zur Vereinfachung $\boldsymbol{\alpha}_t := \boldsymbol{\alpha}(\tilde{\mathbf{s}}(t))$ und $B_t := B(\tilde{\mathbf{s}}(t))$ schreibt:

$$dF(\tilde{\mathbf{x}}_t) = \nabla_{\tilde{x}} F' \, d\tilde{\mathbf{x}}_t + \frac{1}{2} \, d\tilde{\mathbf{x}}' H_F d\tilde{\mathbf{x}} \tag{B.8}$$

$$= \nabla_{\tilde{x}} F' \, (\boldsymbol{\alpha}_t dt + B_t d\tilde{\mathbf{z}}_t) + \frac{1}{2} \, (Bd\tilde{\mathbf{z}})' H_F (Bd\tilde{\mathbf{z}}) \tag{B.9}$$

$$= \nabla_{\tilde{x}} F' \, \boldsymbol{\alpha}_t dt + \nabla_{\tilde{x}} F' B_t d\tilde{\mathbf{z}}_t + \frac{1}{2} \, sp[H_F V] dt. \tag{B.10}$$

wobei $\nabla_{\tilde{x}} F$ der Gradient von F ist, H_F die Hessematrix der zweiten partiellen Ableitungen (siehe Vektoranalysis), und $sp[]$ die Spur einer Matrix, also die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen[4]

Wenn man die Abhängigkeit zur Zeit wieder dazunimmt, dann gilt, wobei $\nabla_{\tilde{x}} F$ und H_F unverändert definiert bleiben mögen:

$$dF(\tilde{\mathbf{x}}_t) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla_{\tilde{x}} F' \, \boldsymbol{\alpha}_t + \frac{1}{2} \, sp[H_F V] \right) \, dt + \nabla_{\tilde{x}} F' B_t d\tilde{\mathbf{z}}_t. \tag{B.16}$$

[4] Um zu zeigen, wie man von $(Bd\tilde{\mathbf{z}})' H_F (Bd\tilde{\mathbf{z}})$ auf $sp[H_F V]dt$ kommt (und die Vorteile der Vektorschreibweise anzudeuten), sei das ganze mal ausgeschrieben:

$$(Bd\tilde{\mathbf{z}})' H_F (Bd\tilde{\mathbf{z}}) = \sum_{f=1}^{F} d\tilde{z}_f \sum_{j=1}^{J} b_{jf} \sum_{j_2=1}^{J} h_{jj_2} \sum_{f_2=1}^{F} b_{j_2 f_2} d\tilde{z}_{f_2} \tag{B.11}$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \sum_{j_2=1}^{J} \sum_{f=1}^{F} \sum_{f_2=1}^{F} b_{jf} b_{j_2 f_2} h_{jj_2} d\tilde{z}_f d\tilde{z}_{f_2} \tag{B.12}$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \sum_{j_2=1}^{J} \sum_{f=1}^{F} b_{jf} b_{j_2 f} h_{jj_2} dt \tag{B.13}$$

und, da $V = BB'$, also $v_{jj_2} = \sum_{f=1}^{F} b_{jf} b_{j_2 f}$

$$= \sum_{j=1}^{J} \sum_{j_2=1}^{J} v_{jj_2} h_{jj_2} dt \tag{B.14}$$

Die Änderung der Funktion F bei einem infinitesimalen Zeitsprung ist also gerade die partielle Ableitung der Funktion nach der Zeit mal der Zeitänderung, plus die partielle Ableitung nach jedem der Assetpreise mal der Änderung des entsprechenden Assetpreises, plus – jetzt kommt der Teil, der bei nichtstochastischer Differentation verschwindet – die partielle Ableitung nach einem Assetpreis der partiellen Ableitung nach einem weiteren Assetpreis der Funktion mal der instantanen Kovarianz der beiden Assetpreise.

Eine sehr anschauliche Einführung in stochastische Prozesse, so weit sie für das Verständnis hier nötig ist, gibt Neftci [48].

μ-σ-Präferenz eines Investors i bezeichnet die Annahme, daß dieser Investor Portfolios nur nach Erwartungswert und Varianz bewertet, das heißt, daß sich eine Funktion U_{ms} finden läßt, die Alternativen nur nach Erwartungswert und Varianz bewertet, und mit den Präferenzen des Investors konsistent ist.

Momente Das $n$te Moment einer Zufallsvariablen $\tilde{X}$ ist, wenn es existiert, definiert als

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\,dx \quad \text{bzw.} \quad \sum_s x_s^n p_s,$$

allgemein also einfacher als $\quad E[(\tilde{X})^n]$.

Das erste Moment wird als μ_X bezeichnet. Das $n$te *Zentral*moment einer Zufallsvariablen $\tilde{X}$, wenn es existiert, definiert als

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^n f_X(x)\,dx \quad \text{bzw.} \quad \sum_s (x_s-\mu_X)^n p_s,$$

allgemein also einfacher als $\quad E[(\tilde{X}-\mu_X)^n]$.

Das nullte Moment und Zentralmoment jeder Zufallsvariable ist gleich der Fläche unter der Dichtefunktion, also eins. Das erste Moment ist der Erwartungswert μ_X, das erste Zentralmoment null. Das zweite Zentralmoment ist die Varianz σ_X^2, das zweite Moment ist $E[(\tilde{X})^2] = \mu_X^2 + \sigma_X^2$ (Steinerscher Verschiebungssatz).

Randportfolio Ein Randportfolio ist eines, das für den gegebenen Renditeerwartungswert minimale Varianz hat. Jedes Randportfolio ist entweder effizient, oder ineffizient, oder das mvp.

effizientes Portfolio Ein effizientes Portfolio ist eines, das für gegebene Varianz den maximalen Erwartungswert hat. Ausnahme: Das Portfolio global minimaler Varianz (MVP) wird nicht effizient genannt. Jedes effiziente Portfolio ist also ein Randportfolio (aber nicht umgekehrt). Effiziente Portfolios liegen auf der oberen (offenen) Häelfte einer Hyperbel (oder, mit dem risikolosen Asset, auf der oberen Halbgeraden) in μ-σ-Raum. Auf der jeweils anderen Hälfte liegen die ineffizienten Portfolios.

---

und, mit $M = H_F V = H_F V$ (da V symmetrisch), also $m_{jj} = \sum_{j_2=1}^{J} h_{jj_2} v_{jj_2}$,

$$= \sum_{j=1}^{J} m_{jj}\,dt = sp[M]dt = sp[H_F V] \tag{B.15}$$

Stieltjes-Integral Kurz, unpräzis und schmerzlos ist das Stieltjes Integral $\int_{x=a}^{b} h(x)\,dF(x)$ ein Grenzwert für $N \to \infty$ der Summe

$$\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})], \tag{B.17}$$

wobei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ und $x_{i-1} < \xi_i < x_1$, und das ist eine Verallgemeinerung des des gewöhnlichen Riemann-Stieltjes Integral. In der Tat, wenn $F(x)$ differenzierbar ist mit $f(x) = F'(x)$, dann ist

$$\int_{x=a}^{b} h(x)\,dF(x) = \int_{x=a}^{b} h(x)f(x)\,dx, \tag{B.18}$$

aber das Stieltjes-Integral läßt sich auch berechnen, wenn $F(x)$ Sprünge hat[5].

Taylorreihenentwicklung Man kann eine analytische Funktion $f(x)$ um einen Punkt x^0 wie folgt expandieren (mit $x = x^0 + \Delta x$):

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x^0) \\
&+ f'(x^0) \cdot (x - x^0) \\
&+ \frac{1}{2} f''(x^0) \cdot (x - x^0)^2 \\
&+ \frac{1}{6} f'''(x^0) \cdot (x - x^0)^3 \\
&\vdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x^0) \cdot (x - x^0)^n
\end{aligned}$$

wobei $f^{(n)}$ die n-te Ableitung der Funktion f darstellt. Für eine analytische Funktion mehrerer Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$ gilt, mit $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}^0) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}^0) \cdot \Delta x_i \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{x}^0) \cdot \Delta x_i \Delta x_j \\
&+ \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f_{ijk}(\mathbf{x}^0) \cdot \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

wobei $f_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x})$.

Wienerprozeß Ein Wienerprozeß ist zunächst eine stetige Funktion der Zeit im Intervall $t \in [0, \infty]$. Allerdings nicht deterministisch, sondern abhängig davon,

[5] Beispiel: die Verteilungsfunktion einer kontinuierlichen Zufallsvariablen, die bestimmte Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit annimmt.

welches zufällige Zustand $s \in \mathcal{S}$ am Anfang gezogen wurde, wobei auf $\mathcal{S}$ Wahrscheinlichkeiten definiert sind [6]

Es ist also eine Funktion $z : \mathcal{S} \times [0, \infty] \mapsto \mathbb{R}$. Nun kann man natürlich den Erwartungswert berechnen von $\tilde{z}_{t_1}$. Allerdings hängt der davon ab, wann man ihn berechnet, denn wenn man kurz vor t_1 ist, dann hat man ja schon die früheren Werte von $\tilde{z}$ beobachtet und kann daher einige Zustände s ausschließen. Welche Zustände man anhand der vergangenen Werte ausschließen kann, wird anhand der Informationsmengen formalisiert und soll hier nicht behandelt werden, wichtig ist, daß der Erwartungswert von $\tilde{z}_t$ davon abhängt, wieviel man schon weiß, welche Werte des Prozesses man schon kennt, anders gesagt, zu welchem Zeitpunkt $t < t_1$ man den Erwartungswert bildet.

Ein Wienerprozeß ist nun dadurch charakterisiert, daß, wann immer man den Erwartungswert eines späteren Zeitpunktes bildet, dieser spätere Wert normalverteilt um den jetzigen Wert streut, und zwar je weiter man in die Zukunft schaut, um so mehr gestreute, also um so größer die Varianz. In der Tat ist die Varianz gerade proportional zur Zeit. Das impliziert, daß die Standardabweichung proportional zur Wurzel aus der verstrichenen Zeit ist. Trägt man sich aber eine Wurzelfunktion auf, so sieht man, daß sie für kleine Werte eine sehr hohe Steigung hat (es ist ja der obere Ast einer nach rechts weisenden Parabel), und das erklärt, warum ein Wienerprozess so enorm steil, zackig, und undifferenzierbar ist.

Ein Wienerprozeß $\tilde{z}_t$ hat somit folgende Eigenschaften[7]:

- Der Prozeß beginnt bei 0: $\tilde{z}_0 = 0$
- Die Inkremente $d\tilde{z}_t$ sind stationär und unabhängig.
- Die Inkremente $d\tilde{z}_t$ sind normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz dt.
- Ebenso sind größere Inkremente normalverteilt: Für $t_1 > t$ ist

  $$E_t[\tilde{z}_{t_1}] - z_t \sim N\big(0; (t_1 - t)\big), \tag{B.19}$$

  also die erwartete Änderung normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t_1 - t$. Über dem z_t steht hier keine Schlange, da z_t zum Zeitpunkt t, wenn der Erwartungswert gebildet wird, ja schon bekannt ist. Daraus ergibt sich:
- Der Prozeß ist ein Martingale, d. h. erwartete zukünftige Wert ist gleich dem jetzigen Wert:

  $$E_t[\tilde{z}_{t_1}] = z_t \tag{B.20}$$
- Der Prozeß ist stetig.
- Der Prozeß ist nirgends differenzierbar.[8]
- Der Prozeß überschreitet jede beliebige Schranke.

[6] Genauer gesagt auf einer σ-Algebra von $\mathcal{S}$.

[7] Hier werden wahllos definierende Eigenschaften und daraus folgende durcheinandergeworfen, insbesondere deswegen, da zwei recht unterschiedliche Definitionen nach dem Lévy-Theorem äquivalent sind.

[8] Diese und die folgenden Punkte gelten mit Wahrscheinlichkeit eins (der Prozeß könnte ja rein zufällig z. B. eine horizontale Linie sein, es ist aber halt extrem unwahrscheinlich.

- Wenn der Prozeß einen bestimmten Wert erreicht, dann kreuzt er ihn danach unendlich oft.

Ein Wienerprozeß ist immer definiert *relativ* zu den Wahrscheinlichkeiten der Zustände $\mathcal{S}$ (wenn man die Wahrscheinlichkeiten ändert, ist der Prozeß vielleicht kein Wienerprozeß mehr) und der Familie der Informationsmengen (wenn man mehr Information hat, z. B. als Insider weiß, daß der Aktienkurs jetzt steigt, dann handelt es sich offenbar nicht mehr um ein Martingale).

Zustandsunabhängige Nutzenfunktion Die formale Beschreibung einer stochastischen Situation enthält $\mathcal{S}$, die Menge der möglichen Zustände morgen, und einige Abbildungen, die abhängig von dem eingetretenen Zustand $s \in \mathcal{S}$ einen bestimmten Wert annehmen, z. B. den Konsum eines Individuums $\tilde{C}$, was einfach eine Abbildung $\tilde{C} : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$ ist. Nun sei noch ein Wahrscheinlichkeitsmaß gegeben, das im wesentlichen jedem möglichen Zustand eine Wahrscheinlichkeit zuschreibt[9], so daß man auch die Verteilungsfunktion für die Zufallsvariable $\tilde{C}$ hat.

	s_1	s_2	s_3
P({s})	1/2	1/4	1/4
$\tilde{C}_1$	5	3	2
$\tilde{C}_2$	5	2	3

Im hier gezeigten Beispiel ist die Verteilung der beiden Zufallsvariablen $\tilde{C}_1$ und $\tilde{C}_2$ gleich, sie haben zwar in manchen Zuständen unterschiedliche Werte, aber beide haben die gleichen Werte mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.

Die Nutzenfunktion hat alternative Zufallsvariable zu beurteilen. Der Unterschied zwischen zustandsabhängigen und zustandsunabhängigen Nutzenfunktionen ist nun der, daß eine zustandsunabhängige nur die Verteilungsfunktion zu sehen bekommt, also nur weiß, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Ergebnis besser ist als ein vorgegebener Wert. Für eine zustandsunabhängige Nutzenfunktion sind also $\tilde{C}_1$ und $\tilde{C}_2$ gleich[10]. Eine zustandsabhängige Nutzenfunktion hingegen beurteilt die ganze Abbildung $\mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$, also die ganze Tabelle (und das Wahrscheinlichkeitsmaß), könnte also den beiden Zufallsvariablen $\tilde{C}_1$ und $\tilde{C}_2$ unterschiedlichen Nutzen zuschreiben.

[9] Da man im Falle unendlicher Zustandsmengen mit dieser simplen Vorgehensweise ziemlich schnell auf Probleme stößt, schreibt man nicht jedem Zustand, sondern einigen Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zu. Ein Ereignis ist eine Menge von Zuständen. Die Menge aller betrachteten Ereignisse $\mathcal{F}$ ist also eine Menge von Teilmengen von $\mathcal{S}$, eine σ-Algebra, und das Wahrscheinlichkeitsmaß P eine Abbildung $\mathcal{F} \mapsto [0, 1]$. Für eine Zufallsvariable $\tilde{x}$, die meßbar ist bezüglich der gewählten σ-Algebra, kann man dann die Verteilungsfunktion $F_{\tilde{x}}(x)$ angeben, und diese unterliegende Struktur wieder schnell vergessen.

[10] Der Nutzen des Investors wird natürlich erheblich davon abhängen, welcher Zustand später tatsächlich eintritt, und wieviel er konsumieren kann!

Anhang C

Notation

C.1 Konventionen

Vergleiche

Vergleiche wie „a ist größer b“, „I präferiert x über y“ , „σ^2 ist positiv“ sind immer strikt, das heißt sie implizieren „b ist nicht größer a“, „I präferiert y nicht über x“, „σ^2 ist nicht null“. Andernfalls heißt es explizit „größer gleich“, „präferiert schwach“, oder „nichtnegativ“.

Zufallsvariable, Erwartungswert und Varianz

Zufallsvariablen sind mit einer Tilde gekennzeichnet; so ist x eine bestimmte Ausprägung der Zufallsvariablen $\tilde{x}$, $x(s)$ ist die Ausprägung im Zustand s. Erwartungswert und Varianz eines komplexeren Ausdrucks T werden als $E[T]$ und $Var[T]$ geschrieben, Erwartungswert und Varianz einer Zufallsvariablen $\tilde{x}$ werden oft abkürzend als μ_x und σ_x^2 dargestellt.

Vektoren und Matrizen

Vektoren (fett gesetzt) sind Spaltenvektoren. $\mathbf{x}$ ist also ein Spaltenvektor, $\mathbf{x}'$ ein Zeilenvektor, und das Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ wird geschrieben $\mathbf{x}'\mathbf{y}$. $\mathbf{1}$ bezeichnet einen Vektor, der nur aus Einsen besteht, $\mathbf{0}$ einen, der nur aus Nullen besteht.

Portfolios

Für ein Portfolio p bezeichnet $\mathbf{y}_p$ die Assetgewichte, μ_p den Erwartungswert der Rendite, und σ_p^2 die Varianz der Rendite des Portfolios. Normierte Portfolios mit $\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{1} = 1$ sind mit einem Dach gekennzeichnet.

C.2 Verzeichnis der Symbole

b_{jf}	Volatilität der sofortigen Assetrendite (Sensitivität von Asset j für Faktor f)
B	$(J \times F)$-Matrix der Faktorladungen
c	sichere Alternative
$\tilde{c}$	unsichere Alternative (Zufallsvariable/Wahrscheinlichkeitsverteilung)
$\mathcal{C}$	Menge der sicheren Alternativen
$\tilde{\mathcal{C}}$	Menge der unsicheren Alternativen
$c(t)$	Konsumrate (Konsum per Zeiteinheit)
C	Konsum
$E[\circ]$	Erwartungswert, auch als $\mu_\circ$ geschrieben
f	Faktor, Unsicherheitsquelle
F	Zahl der Faktoren
$\hat{\mathbf{g}}$	Ortsvektor der Geraden mit den Randportfolios im Assetraum
$\mathbf{h}$	Richtungsvektor der Geraden mit den Randportfolios im Assetraum
i	Investor
I	Zahl der Investoren
j	Asset
J	Zahl der Assets (falls risikoloses: $J+1$)
$\mathcal{J}$	Menge der Assets
m	Subskript für das Marktportfolio
mvp	Subskript für das globale Minimum-Varianz Portfolio
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert und Varianz
N_j	Nettangebot an Anteilen von Asset j
p	Preis, oder Name für ein Randportfolios
$\tilde{p}_j$	Stochastischer Preis des Assets j
$\tilde{r}_j$	Stochastische Rendite von Asset j
q	Name eines (meist normierten) Portfolios
$\tilde{\mathbf{r}}$	Vektor der stochastischen Renditen der Assets
s	Zustand
S	Zahl der Zustände
$\mathcal{S}$	Menge der Zustände
t	Zeit
U	Nutzenfunktion, die eine Alternative bewertet
$U_{\tilde{\mathcal{C}}}$	bewertet unsichere Alternativen
U_E	von-Neumann-Morgenstern, bewertet sichere Alternativen
$U_{\mu\sigma}$	bewertet Alternativen nur nach μ und σ^2
$Var[\circ]$	Varianz, auch als $\sigma^2_\circ$ geschrieben
$\mathbf{V}_r$	Kovarianzmatrix der Renditen der J Assets
$\mathbf{V}_x$	Kovarianzmatrix der Auszahlungen der J Assets
W	Vermögen
$\tilde{x}_j$	Stochastische Auszahlung von Asset j
$\tilde{\mathbf{x}}$	Vektor der stochastischen Auszahlungen der Assets

$\mathbf{y}$	Portfolio (y_j = Einsatz von Asset j)
$\hat{\mathbf{y}}$	auf Gesamteinsatz von 1 normiertes Portfolio, y_j ist Anteil von Asset j
$\mathcal{Y}$	Menge der Portfolios, meist $\mathbb{R}^J$
$\hat{\mathcal{Y}}$	Menge der normierten Portfolios
$\tilde{z}_t$	Standard-Wienerprozess mit $d\tilde{z}_t \sim N(0, (\sqrt{dt})^2)$
$zc(p)$	Subskript für das Nullkovarianz-Randportfolio zu Randportfolio p
β_{jp}	Beta eines Assets j bezüglich Randportfolio p
$\mu_\circ$	Allgemein: Erwartungswert von $\circ$
μ	Im zeitkontinuierlichen Kontext: Drift der sofortigen Assetrendite
$\boldsymbol{\mu}_r$	Vektor der Erwartungswerte der Renditen der J Assets
$\boldsymbol{\mu}_x$	Vektor der Erwartungswerte der Auszahlungen der J Assets
$\sigma_\circ$	Standardabweichung von $\circ$

C.3 Einige Kommentare zur Literatur

Zeitdiskretes CAPM

Schöne Übersichtsartikel sind Ross (1978) [56] über das klassische CAPM und seine Grundlagen, oder, neuer (von 1995), Constantinides/Malliaris [12].

Eine sehr anschauliche Heranführung an das CAPM findet sich in Copeland/Weston [13].

Die in dieser Arbeit benutzten Ableitungen des CAPM finden sich in den etwas theoretischeren und anspruchsvolleren Büchern von Huang/Litzenberger [23] und Jarrow [31].

Sehr kurze, elegante und modernere Darstellungen findet man in den mathematischer orientierten Büchern von Duffie [15], [16]. Sie sind sehr kompakt, präzise, unzugänglich und ausschließlich theoretisch [1], und verstellen leicht den Blick auf das zugrundeliegende ökonomische Geschehen. Eine bessere Einführung (mit einigen originellen Resultaten) in die moderne Darstellung gibt die Dissertation von Löffler [39, Kapitel 2] (sogar auf Deutsch).

Ingersoll, vom Niveau etwas über Huang/Litzenberger hinausgehend, behandelt sowohl das zeitdiskrete als auch das zeitkontinuierliche CAPM und bringt viele Grundlagen, Beispiele, und Erweiterungen.

Zeitkontinuierliches CAPM

Auf Mertons „Continuous-Time Finance“ [46] beruht zwar diese Arbeit, das Buch – eine Kollektion von größtenteils schon vorher veröffentlichten Artikeln – ist aber nicht ganz einfach zu lesen: Erstens ist es nicht sehr homogen, die Notation nicht ganz einheitlich, und schließlich die Darstellung teilweise nicht ganz modern (einige der Artikel sind von 1969!)[2]. Sehr hilfreich ist das Buch aber bei der heuristischen

[1] Ingersoll [30] merkt an: „However, the mathematical sophistication required for a true appreciation is a bit beyond me and, I would surmise, most students and faculty in the field…“.

[2] Duffie [16, S. xiv] bezeichnet die Dekade ab 1969 als die der stürmischen Entwicklung, die danach als die der Aufräumarbeiten („a mopping-up operation“)

Begründung der Bellmanschen Fundamentalgleichung, andere Bücher, die sich mit „optimal stochastic control“ befassen, sind recht schwierig.

Besser lesbare Einleitungen in stochastische Analysis (Wienerprozesse, Itô-Kalkül etc.) geben Neftci [48] auf sehr intuitivem Niveau und Øksendal [51] auf eher mathematischem Niveau.

Eine sehr systematische, aber anspruchsvolle Abhandlung über zeitkontinuierliche Kapitalmarktanalyse auf Deutsch ist die Habilitationsschrift von Schöbel [60].

Literaturverzeichnis

[1] R. W. Banz. The relationship between return and market value of common stocks. *Journal of Financial Economics*, 9:13–18, 1981.

[2] Jonathan B. Berk. Necessary conditions for the CAPM. *Journal of Economic Theory*, 73:245–257, 1997.

[3] Daniel Bernoulli. Specimen theoriae novae de mensura sorties. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 5, 1738. Englische Übersetzung in [4].

[4] Daniel Bernoulli. Exposition of a new theory on the measurement of risk. *Econometrica*, 22, 1954.

[5] F. Black. Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*, 45:444–454, 1972.

[6] F. Black, M. C. Jensen, and M. Scholes. The capital asset pricing model: Some empirical tests. In M. C. Jensen, editor, *Studies in the Theory of Capital Markets*. Praeger, New York, 1972.

[7] K. Borch. A note on uncertainty and indifference curves. *Review of Economic Studies*, 36:1–5, 1969.

[8] Jean-Marc Bottazzi, Thorsten Hens, and Andreas Löffler. Market demand functions in the Capital Asset Pricing Model. *Journal of Economic Theory*, 79:192–206, 1998.

[9] Douglas T. Breeden. An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Journal of Financial Economics*, 7:265–296, 1979.

[10] D. Cass and J. Stiglitz. The structure of investor preferences and asset returns, and separability in portfolio selection: A contribution to the pure theory of mutual funds. *Journal of Economic Theory*, 2:122–160, 1970.

[11] G. Chamberlain. A characterization of the distributions that imply mean-variance utility functions. *Journal of Economic Theory*, 29:185–201, 1983.

[12] G. M. Constantinides and A. G. Malliaris. Portfolio theory. In R. A. Jarrow, V. Maksimovic, and W. T. Ziemba, editors, *Finance*, volume 9 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, chapter 1. Elsevier, Amsterdam, Lausanne, New York, etc., 1995.

[13] Thomas E. Copeland and J. Fred Weston. *Financial Theory and Corporate Policy*. Addison-Wesley Publishing, 1992. Dritte Auflage.

[14] G. Debreu. Representation of a preference ordering by a numerical function. In R. Thrall, editor, *Decision Processes*, pages 159–165. Wiley & Sons, New York, 1954.

[15] Darrel Duffie. *Security Markets*. Academic Press, San Diego, 1988.

[16] Darrel Duffie. *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1996. Zweite Auflage.

[17] E. Elton and M. Gruber. Non-standard CAPMs and the market portfolio. *Journal of Finance*, 39:911–924, July 1984.

[18] L. Epstein. Decreasing risk aversion and mean-variance analysis. *Econometrica*, 53:945–962, 1985.

[19] Eugen F. Fama. Risk, return, and equilibrium: Some clarifying comments. *Journal of Finance*, 23:29–40, 1968.

[20] Eugen F. Fama and Kenneth R. French. The cross-section of expected stock returns. *Journal of Finance*, 47:427–465, 1992.

[21] Eugene F. Fama and Kenneth R. French. The CAPM is wanted, dead or alive. *Journal of Finance*, 51(5):1947–1956, December 1996.

[22] M. S. Feldstein. Mean-variance analysis in the theory of liquidity preference and portfolio selection. *Review of Economic Studies*, 36:5–12, 1969.

[23] Chi fu Huang and Robert H. Litzenberger. *Foundations for Financial Economics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[24] N. J. Gonedes. Capital market equilibrium for a class of heterogeneous expectations in a two-parameter world. *Journal of Finance*, 31:1–15, 1976.

[25] Earl L. Grinols. Production and risk leveling in the intertemporal capital asset, pricing model. *Journal of Finance*, 39(5):1571–1595, December 1984.

[26] Oliver D. Hart. On the existence of equilibrium in a securities model. *Journal of Economic Theory*, 9:293–311, 1974.

[27] Thorsten Hens and Andreas Löffler. Existence and uniqueness of equilibria in the CAPM with a riskless asset. Discussion Paper 346, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Universität Bielefeld, December 1995.

[28] Stewart Hodges. Introduction to stochastic methods. Technical report, University of Warwick, Coventry, 1997.

[29] Jonathan E. Ingersoll, Jr. *Theory of Financial Decision Making*. Rowman & Littlefield Publishers, Inc., Savage, Maryland, 1987.

[30] Jonathan E. Ingersoll, Jr. Book review: *Dynamic Asset Pricing Theory* [16]. *Journal of Finance*, 48:2033–2034, 1993. Zitiert nach [39].

[31] Robert A. Jarrow. *Finance Theory*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.

[32] Robert A. Jarrow and Eric R. Rosenfeld. Jump risks and the intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Journal of Business*, 57(3):337–351, 1984.

[33] S. P. Kothari, Jay Shanken, and Richard G. Sloan. Another look at the cross-section of expected stock returns. *Journal of Finance*, 50:185–224, 1995.

[34] H. J. Kushner. *Stochastic Stability and Control*. Academic Press, New York, 1967.

[35] W. Leontieff. A note on the interrelation of subsets of independent variables of a continuous function with continuous first derivatives. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53:343–350, 1947.

[36] John Lintner. Security prices, risk, and maximal gains from diversification. *Journal of Finance*, pages 587–615, December 1965.

[37] John Lintner. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economic and Statistics*, 47:346–382, 1965.

[38] John Lintner. The aggregation of investor's diverse judgement and preferences in purely competetive securities markets. *J. Finan. Quant. Anal.*, 4:347–400, 1969.

[39] Andreas Löffler. *Capital Asset Pricing Model mit Konsumtion*. Gabler–Verlag, Wiesbaden, 1996.

[40] Andreas Löffler. Variance aversion implies μ-σ^2-criterion. *Journal of Economic Theory*, 69:532–539, 1996.

[41] Francis A. Longstaff. Temporal aggregation and the continuous-time capital asset pricing model. *Journal of Finance*, 44(4):871, September 1989.

[42] Claus Lucke. Beiblätter zur Vorlesung Investition und Finanzplanung unter Unsicherheit, Teil 1: Kapitalmarkttheorie. Technical report, Universität Karlsruhe (TH), 1998.

[43] M. Machina. 'Expected utility' analysis without the independence axiom. *Econometrica*, 50:277–323, March 1982.

[44] Harry Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7:77–91, 1952.

[45] Robert C. Merton. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *Review of Economics and Statistics*, 51:247–257, 1969. Abgedruckt in [46].

[46] Robert C. Merton. *Continuous-time finance*. Blackwell Publishers, 1997. Achte Auflage.

[47] Jan Mossin. Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, 34(4):768–783, October 1966.

[48] Salih N. Neftci. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press, San Diego, California, 1996.

[49] Lars Tyge Nielsen. Portfolio selection in the mean-variance model: A note. *Journal of Finance*, 42(5):1371–1376, December 1987.

[50] Lars Tyge Nielsen. Existence of equilibrium in CAPM. *Journal of Economic Theory*, 52:223–231, 1990.

[51] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 1997. Fünfte Auflage.

[52] R. Rabinowitch and J. Owen. Nonhomogeneous expectations and information in the Capital Asset Pricing Model. *Journal of Finance*, 33:575–587, 1978.

[53] M. R. Reinganum. Misspecification of capital asset pricing. Empirical anomalies based on earnings' yields and market values. *Journal of Financial Economics*, 9:19–46, 1981.

[54] Richard Roll. A critique of the asset pricing theory's tests – part I: On past and potential testability of the theory. *Journal of Financial Economics*, 4:129–176, 1977.

[55] Stephen A. Ross. The arbitrage pricing theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 13:341–360, 1976.

[56] Stephen A. Ross. The current status of the capital asset pricing model (CAPM). *Journal of Finance*, 33(3):885–901, June 1978.

[57] Stephen A. Ross. Mutual fund separation in financial theory – the separating distributions. *Journal of Economic Theory*, 17:254–286, 1978.

[58] M. Rothschild and J. Stiglitz. Increasing risk I: A definition. *Journal of Economic Theory*, 2:225–243, 1970.

[59] H. Schneeweiß. The role of risk aversion in the Capital Asset Pricing Model. *OR Spektrum*, 16:169–173, 1994.

[60] Rainer Schöbel. *Kapitalmarkt und zeitkontinuierliche Bewertung*. Physica-Verlag, Heidelberg, 1995. Habilitationsschrift.

[61] Jay Shanken. Multi-beta CAPM or equilibrium-APT?: A reply. *Journal of Finance*, 40(4):1189–1196, September 1985.

[62] William F. Sharpe. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19(3):425–442, September 1964.

[63] James Tobin. Liquidity preference as behavior towards risk. *Review of Economic Studies*, 25:65–86, 1958.

[64] P.P. Wakker. Cardinal coordinate independence for expected utility. *Journal of Mathematical Psychology*, 28:110–117, 1984.